Symetrie dyskretne w mechanice kwantowej

Wykład 16

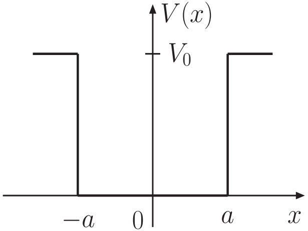
Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Skończona studnia potencjału

Badając ruch cząstki w jednym wymiarze w potencjale symetrycznym względem osi Oy pokazaliśmy, że funkcja falowa musi być albo parzysta albo nieparzysta.

Przypomnijmy, że dla cząstki w prostokątnej studni potencjału o skończonej wysokości

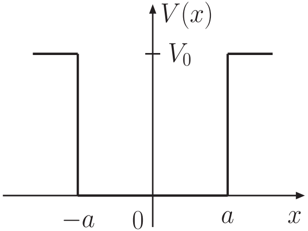


$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad |x| < a, \\ V_0, & \text{dla} \quad |x| > a, \end{cases}$$

znaleźliśmy dwie klasy rozwiązań.

Badając ruch cząstki w jednym wymiarze w potencjale symetrycznym względem osi Oy pokazaliśmy, że funkcja falowa musi być albo parzysta albo nieparzysta.

Przypomnijmy, że dla cząstki w prostokątnej studni potencjału o skończonej wysokości



$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad |x| < a, \\ V_0, & \text{dla} \quad |x| > a, \end{cases}$$

znaleźliśmy dwie klasy rozwiązań.

Skończona studnia potencjału

Rozwiązanie należące do I klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} Ce^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ B\cos(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ Ce^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

a rozwiązanie należące do II klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} De^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ A\sin(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ -De^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

Skończona studnia potencjału

Rozwiązanie należące do I klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} Ce^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ B\cos(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ Ce^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

a rozwiązanie należące do II klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} De^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ A\sin(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ -De^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

Widać, że funkcje falowe I klasy są parzyste, tzn. $u(-x) = u(x)$, Rozwiązanie należące do I klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} Ce^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ B\cos(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ Ce^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

a rozwiązanie należące do II klasy miało postać

$$u(x) = \begin{cases} De^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ A\sin(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ -De^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

Widać, że funkcje falowe I klasy są parzyste, tzn. $u(-x) = u(x)$, a funkcje II klasy są nieparzyste, $u(-x) = -u(x)$.

Skończona studnia potencjału

Rozwiązanie należące do I klasy miało postać

$$u(x) \quad = \quad \begin{cases} Ce^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ B\cos(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ Ce^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

a rozwiązanie należące do II klasy miało postać

$$u(x) \quad = \quad \begin{cases} De^{\beta x}, & \text{dla} \quad x < -a, \\ A\sin(\alpha x), & \text{dla} \quad |x| < a, \\ -De^{-\beta x}, & \text{dla} \quad x > a. \end{cases}$$

Widać, że funkcje falowe I klasy są parzyste, tzn. $u(-x) = u(x)$, a funkcje II klasy są nieparzyste, $u(-x) = -u(x)$.

Taki podział funkcji własnych na parzyste i nieparzyste wynika z symetrii potencjału

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{dla} \quad x < -a, \\ 0, & \text{dla} \quad |x| < a, \\ V_0, & \text{dla} \quad x > a, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad V(-x) = V(x).$$

Napiszmy równanie falowe z potencjałem $V(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

i dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

Skończona studnia potencjału

Taki podział funkcji własnych na parzyste i nieparzyste wynika z symetrii potencjału

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \mathrm{dla} \quad x < -a, \\ 0, & \mathrm{dla} \quad |x| < a, \\ V_0, & \mathrm{dla} \quad x > a, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad V(-x) = V(x).$$

Napiszmy równanie falowe z potencjałem $V(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

i dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

Przy zamianie $x \to -x$

$$\begin{aligned} V(x) &\rightarrow V(-x) = V(x), \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} &\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)} = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{aligned}$$

Dlatego otrzymujemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u(-x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)u(-x) = Eu(-x).$$

Skończona studnia potencjału

Przy zamianie $x \rightarrow -x$

$$V(x) \rightarrow V(-x) = V(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)} = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

Dlatego otrzymujemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u(-x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)u(-x) = Eu(-x).$$

Widzimy, że $u(x)$ i $u(-x)$ spełaniają dokładnie takie samo równanie falowe, z taką samą wartością własną E.

Przy zamianie $x \to -x$

$$
\begin{aligned}
V(x) \quad &\to \quad V(-x) = V(x), \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \quad &\to \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)} = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}
\end{aligned}
$$

Dlatego otrzymujemy równanie

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\mathrm{d}^2 u(-x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)u(-x) = Eu(-x).
$$

Widzimy, że $u(x)$ i $u(-x)$ spełaniają dokładnie takie samo równanie falowe, z taką samą wartością własną E.

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Wstawiając $u(-x)$ z pierwszego równania otrzymamy

$$u(x) = \varepsilon u(-x)$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \rightarrow -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Wstawiając $u(-x)$ z pierwszego równania otrzymamy

$$u(x) = \varepsilon u(-x) = \varepsilon^2 u(x)$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Wstawiając $u(-x)$ z pierwszego równania otrzymamy

$$u(x) = \varepsilon u(-x) = \varepsilon^2 u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 = 1$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \rightarrow -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Wstawiając $u(-x)$ z pierwszego równania otrzymamy

$$u(x) = \varepsilon u(-x) = \varepsilon^2 u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Załóżmy, że energii E odpowiada tylko jedna niezależna funkcja falowa $u(x)$, tzn. nie ma degeneracji.
Wtedy funkcja $u(-x)$ musi być liniowo zależna od $u(x)$, a więc istnieje stała ε taka, że

$$u(-x) = \varepsilon u(x).$$

Dokonajmy zamiany zmiennej $x \to -x$.

$$u(x) = \varepsilon u(-x).$$

Wstawiając $u(-x)$ z pierwszego równania otrzymamy

$$u(x) = \varepsilon u(-x) = \varepsilon^2 u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Parzystość rozwiązań

Widzimy, że jeśli nie ma degeneracji, to funkcje falowe symetrycznego potencjału muszą być albo parzyste

$$u(-x) = u(x), \qquad (\varepsilon = 1),$$

Parzystość rozwiązań

Widzimy, że jeśli nie ma degeneracji, to funkcje falowe symetrycznego potencjału muszą być albo parzyste

$$u(-x) = u(x), \qquad (\varepsilon = 1),$$

albo nieparzyste

$$u(-x) = -u(x), \qquad (\varepsilon = -1).$$

Parzystość rozwiązań

Widzimy, że jeśli nie ma degeneracji, to funkcje falowe symetrycznego potencjału muszą być albo parzyste

$$u(-x) = u(x), \qquad (\varepsilon = 1),$$

albo nieparzyste

$$u(-x) = -u(x), \qquad (\varepsilon = -1).$$

O takich funkcjach falowych mówimy, że mają określoną parzystość: dodatnią ($\varepsilon = 1$) lub ujemną ($\varepsilon = -1$).

Parzystość rozwiązań

Widzimy, że jeśli nie ma degeneracji, to funkcje falowe symetrycznego potencjału muszą być albo parzyste

$$u(-x) = u(x), \qquad (\varepsilon = 1),$$

albo nieparzyste

$$u(-x) = -u(x), \qquad (\varepsilon = -1).$$

O takich funkcjach falowych mówimy, że mają określoną parzystość: dodatnią ($\varepsilon = 1$) lub ujemną ($\varepsilon = -1$).

Jeżeli energia potencjalna w równaniu Schrödingera nie ulega zmianie przy przekształceniu $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$, tzn. $V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$, Jeżeli energia potencjalna w równaniu Schrödingera nie ulega zmianie przy przekształceniu $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, tzn. $V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$, to funkcje własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Parzystość rozwiązań

Jeżeli energia potencjalna w równaniu Schrödingera nie ulega zmianie przy przekształceniu $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$, tzn. $V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$, to funkcje własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Postaramy się znaleźć ogólny związek pomiędzy operacją inwersji przestrzennej a parzystością przy zastosowaniu formalizmu zastosowanego do badania symetrii w mechanice kwantowej.
Inwersja przestrzenna zdefiniowana jest wzorem

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} = P\,\vec{r}.$$

Inwersja przestrzenna

Postaramy się znaleźć ogólny związek pomiędzy operacją inwersji przestrzennej a parzystością przy zastosowaniu formalizmu zastosowanego do badania symetrii w mechanice kwantowej. Inwersja przestrzenna zdefiniowana jest wzorem

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r} = P\,\vec{r}.$$

Widzimy, że macierz inwersji P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Postaramy się znaleźć ogólny związek pomiędzy operacją inwersji przestrzennej a parzystością przy zastosowaniu formalizmu zastosowanego do badania symetrii w mechanice kwantowej. Inwersja przestrzenna zdefiniowana jest wzorem

$$\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r} = P\,\vec{r}.$$

Widzimy, że macierz inwersji P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P^T = P.$$

Postaramy się znaleźć ogólny związek pomiędzy operacją inwersji przestrzennej a parzystością przy zastosowaniu formalizmu zastosowanego do badania symetrii w mechanice kwantowej. Inwersja przestrzenna zdefiniowana jest wzorem

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}' = -\vec{r} = P\,\vec{r}.$$

Widzimy, że macierz inwersji P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P^T = P.$$

Inwersja przestrzenna

Zauważmy, że

$$P^T P = P^2 = \mathbb{I},$$

ale ponieważ

$$\det P = (-1)^3 = -1,$$

to macierz P nie reprezentuje obrotu właściwego.

Zauważmy, że

$$P^T P = P^2 = \mathbb{I},$$

ale ponieważ

$$\det P = (-1)^3 = -1,$$

to macierz P nie reprezentuje obrotu właściwego.
Każdą rzeczywistą macierz ortogonalną o wyznaczniku -1 można zapisać jako iloczyn macierzy obrotu właściwego i macierzy P.

Zauważmy, że

$$P^T P = P^2 = \mathbb{I},$$

ale ponieważ

$$\det P = (-1)^3 = -1,$$

to macierz P nie reprezentuje obrotu właściwego.
Każdą rzeczywistą macierz ortogonalną o wyznaczniku -1 można zapisać jako iloczyn macierzy obrotu właściwego i macierzy P.

Inwersja układu fizycznego w stanie reprezentowanym przez wektor $|\alpha\rangle$, albo funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$, spowoduje jego przejście w stan reprezentowany przez wektor $|\alpha'\rangle$, albo funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r})$.
Związek pomiędzy tymi dwoma stanami ma postać

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie ω jest liczbą, którą określimy za chwilę.

Inwersja układu fizycznego w stanie reprezentowanym przez wektor $|\alpha\rangle$, albo funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$, spowoduje jego przejście w stan reprezentowany przez wektor $|\alpha'\rangle$, albo funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r})$. Związek pomiędzy tymi dwoma stanami ma postać

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie ω jest liczbą, którą określimy za chwilę.
W przypadku transformacji ciągłych rozpatrywanych wcześniej: translacji przestrzennej i czasowej oraz obrotu właściwego, nie wprowadziliśmy tego rodzaju czynnika liczbowego.

Inwersja układu fizycznego w stanie reprezentowanym przez wektor $|\alpha\rangle$, albo funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$, spowoduje jego przejście w stan reprezentowany przez wektor $|\alpha'\rangle$, albo funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r})$. Związek pomiędzy tymi dwoma stanami ma postać

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie ω jest liczbą, którą określimy za chwilę.
W przypadku transformacji ciągłych rozpatrywanych wcześniej: translacji przestrzennej i czasowej oraz obrotu właściwego, nie wprowadziliśmy tego rodzaju czynnika liczbowego.

Inwersja przestrzenna

Dla transformacji ciągłej musiałby on zależeć w sposób ciągły od parametrów transformacji: $\vec{\rho}, \tau$ lub $\vec{\phi}$, tak aby dla $\vec{\rho} = \vec{0}$, $\tau = 0$

Dla transformacji ciągłej musiałby on zależeć w sposób ciągły od parametrów transformacji: $\vec{\rho}, \tau$ lub $\vec{\phi}$, tak aby dla $\vec{\rho} = \vec{0}$, $\tau = 0$ lub $\vec{\phi} = \vec{0}$

Dla transformacji ciągłej musiałby on zależeć w sposób ciągły od parametrów transformacji: $\vec{\rho}, \tau$ lub $\vec{\phi}$, tak aby dla $\vec{\rho} = \vec{0}$, $\tau = 0$ lub $\vec{\phi} = \vec{0}$ zachodziło $\omega = 1$.

Dla transformacji ciągłej musiałby on zależeć w sposób ciągły od parametrów transformacji: $\vec{\rho}, \tau$ lub $\vec{\phi}$, tak aby dla $\vec{\rho} = \vec{0}$, $\tau = 0$ lub $\vec{\phi} = \vec{0}$ zachodziło $\omega = 1$.

Można pokazać, że obecność takiego czynnika liczbowego nie miałaby żadnych konsekwencji fizycznych.

Dla transformacji ciągłej musiałby on zależeć w sposób ciągły od parametrów transformacji: $\vec{\rho}, \tau$ lub $\vec{\phi}$, tak aby dla $\vec{\rho} = \vec{0}$, $\tau = 0$ lub $\vec{\phi} = \vec{0}$ zachodziło $\omega = 1$.
Można pokazać, że obecność takiego czynnika liczbowego nie miałaby żadnych konsekwencji fizycznych.

Inwersja przestrzenna

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P \left|\alpha\right\rangle = \left|\alpha'\right\rangle \quad \text{lub} \quad U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdyż $P^2 = \mathbb{I}$, więc

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r})$$

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdyż $P^2 = \mathbb{I}$, więc

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad U_P^2\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P\psi_\alpha(-\vec{r})$$

Inwersja przestrzenna

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdyż $P^2 = \mathbb{I}$, więc

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad U_P^2\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P\psi_\alpha(-\vec{r}) = \omega^2\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdyż $P^2 = \mathbb{I}$, więc

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad U_P^2\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P\psi_\alpha(-\vec{r}) = \omega^2\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Dwie kolejne inwersje przestrzenne przeprowadzają przestrzeń położeniową na siebie, więc operator U_P^2 powinien przeprowadzać każdy stan w siebie.

Zdefiniujmy unitarny operator inwersji

$$U_P\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Ponieważ

$$\psi_{\alpha'}(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(PP\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(P\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdyż $P^2 = \mathbb{I}$, więc

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad U_P^2\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P\psi_\alpha(-\vec{r}) = \omega^2\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Dwie kolejne inwersje przestrzenne przeprowadzają przestrzeń położeniową na siebie, więc operator U_P^2 powinien przeprowadzać każdy stan w siebie.

Inwersja przestrzenna

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.
Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.
Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.
Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji,

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.

Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.

Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}\psi_{\alpha}(\vec{r}),$$

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.
Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.
Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}),$$

to

$$U_P \psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} U_P \psi_{\alpha}(\vec{r})$$

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.

Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.

Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_\alpha a_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}),$$

to

$$U_P\psi(\vec{r}) = \sum_\alpha a_\alpha U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = \sum_\alpha \omega_\alpha a_\alpha \psi_\alpha(-\vec{r}),$$

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.

Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.

Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}),$$

to

$$U_P \psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} U_P \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(-\vec{r}),$$

co na ogół różni się od $\omega\psi(-\vec{r})$,

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.
Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.
Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}),$$

to

$$U_P \psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} U_P \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(-\vec{r}),$$

co na ogół różni się od $\omega\psi(-\vec{r})$, chyba, że wszystkie ω_{α} są sobie równe.

Stan może się przy tym zmienić o czynnik o module 1, ale jego norma nie może ulec zmianie.
Stąd wnioskujemy, że ω^2 jest liczbą o module 1.
Zauważmy, że ω musi przyjmować tę samą wartość dla wszystkich stanów podlegających superpozycji, tzn., jeżeli

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}),$$

to

$$U_P \psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} U_P \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(-\vec{r}),$$

co na ogół różni się od $\omega\psi(-\vec{r})$, chyba, że wszystkie ω_{α} są sobie równe.

Inwersja przestrzenna

Dlatego założymy, że ω ma tę samą wartość dla każdego rodzaju cząstek mogących ze sobą interferować.

Dla cząstki o spinie całkowitym dwukrotne złożenie inwersji powinno dać ten sam stan, więc

$$\omega^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1.$$

Dlatego założymy, że ω ma tę samą wartość dla każdego rodzaju cząstek mogących ze sobą interferować.
Dla cząstki o spinie całkowitym dwukrotne złożenie inwersji powinno dać ten sam stan, więc

$$\omega^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1.$$

Zgodnie z regułą składania stanów własnych momentu pędu, układ dwóch cząstek o spinie połówkowym ma całkowity moment pędu.

Dlatego założymy, że ω ma tę samą wartość dla każdego rodzaju cząstek mogących ze sobą interferować.
Dla cząstki o spinie całkowitym dwukrotne złożenie inwersji powinno dać ten sam stan, więc

$$\omega^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1.$$

Zgodnie z regułą składania stanów własnych momentu pędu, układ dwóch cząstek o spinie połówkowym ma całkowity moment pędu.
Dlatego dla cząstek o spinie połówkowym

$$\omega^2 = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1, \pm i.$$

Dlatego założymy, że ω ma tę samą wartość dla każdego rodzaju cząstek mogących ze sobą interferować.
Dla cząstki o spinie całkowitym dwukrotne złożenie inwersji powinno dać ten sam stan, więc

$$\omega^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1.$$

Zgodnie z regułą składania stanów własnych momentu pędu, układ dwóch cząstek o spinie połówkowym ma całkowity moment pędu. Dlatego dla cząstek o spinie połówkowym

$$\omega^2 = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \pm 1, \pm i.$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.

Obliczmy

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle \quad = \quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P\,|\alpha(t)\rangle\right) =$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera. Obliczmy

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_P|\alpha(t)\rangle) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P\,|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera. Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_P H|\alpha(t)\rangle = \end{aligned}$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera. Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle \end{aligned}$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\
&= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger|\alpha'(t)\rangle,
\end{aligned}
$$

Inwersja przestrzenna

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera. Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle \\ &= U_P H\left|\alpha(t)\right\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P\left|\alpha(t)\right\rangle = U_P H U_P^\dagger\left|\alpha'(t)\right\rangle, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger|\alpha'(t)\rangle, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.
Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger|\alpha'(t)\rangle, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.
Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$U_P H U_P^\dagger = H$$

Inwersja przestrzenna

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera. Obliczmy

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\
&= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger|\alpha'(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.
Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$U_P H U_P^\dagger = H \qquad \Leftrightarrow \qquad U_P H = H U_P$$

Inwersja przestrzenna

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P\,|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= U_P H\,|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P\,|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger\,|\alpha'(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.
Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$U_P H U_P^\dagger = H \quad \Leftrightarrow \quad U_P H = H U_P \quad \Leftrightarrow \quad [U_P, H] = 0.$$

Wstawmy stan odbity $|\alpha'(t)\rangle$ do równania Schrödingera.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_P|\alpha(t)\rangle\right) = U_P i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_P H|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger U_P|\alpha(t)\rangle = U_P H U_P^\dagger|\alpha'(t)\rangle , \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$ i z unitarności operatora U_P.
Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$U_P H U_P^\dagger = H \quad \Leftrightarrow \quad U_P H = H U_P \quad \Leftrightarrow \quad [U_P, H] = 0.$$

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P |\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.

Inwersja przestrzenna

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P\,|\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.

Zbadajmy wpływ inwersji na operatory położenia, pędu i momentu pędu.

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P\,|\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.

Zbadajmy wpływ inwersji na operatory położenia, pędu i momentu pędu.

Przypomnijmy, że

$$U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r})$$

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P\,|\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.

Zbadajmy wpływ inwersji na operatory położenia, pędu i momentu pędu.

Przypomnijmy, że

$$U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega \psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P^\dagger \psi_\alpha(-\vec{r}).$$

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.
Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P\,|\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.
Zbadajmy wpływ inwersji na operatory położenia, pędu i momentu pędu.
Przypomnijmy, że

$$U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega \psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P^\dagger \psi_\alpha(-\vec{r}).$$

Dzieląc ostatnią równość przez ω i podstawiając $\vec{r} \to -\vec{r}$ otrzymamy

$$U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1} \psi_\alpha(-\vec{r}).$$

Inwersja przestrzenna

Jeżeli $[U_P, H] = 0$, to operatory H i U_P można jednocześnie zdiagonalizować i stany własne energii można wybrać tak, aby miały określoną parzystość.

Ponadto jeśli stany $|\alpha\rangle$ i $U_P\,|\alpha\rangle$ są liniowo niezależne, to mamy do czynienia z degeneracją wartości własnych energii.

Zbadajmy wpływ inwersji na operatory położenia, pędu i momentu pędu.

Przypomnijmy, że

$$U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega \psi_\alpha(-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega U_P^\dagger \psi_\alpha(-\vec{r}).$$

Dzieląc ostatnią równość przez ω i podstawiając $\vec{r} \to -\vec{r}$ otrzymamy

$$U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1} \psi_\alpha(-\vec{r}).$$

Inwersja przestrzenna

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^\dagger,$$

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^{\dagger},$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle$$

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^\dagger,$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle = \langle\beta\,|U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\,|\alpha\rangle\,.$$

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^\dagger,$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle = \langle\beta\,|U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\,|\alpha\rangle\,.$$

Aby obliczyć $U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P$ podziałajmy tym operatorem na dowolną funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$.

$$U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\psi_\alpha(\vec{r})$$

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\, |\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\, U_P^\dagger,$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle = \langle\beta\,| U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P\, |\alpha\rangle\,.$$

Aby obliczyć $U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P$ podziałajmy tym operatorem na dowolną funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$.

$$U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\, \vec{r}\, \omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^\dagger,$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle = \langle\beta\,|U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\,|\alpha\rangle\,.$$

Aby obliczyć $U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P$ podziałajmy tym operatorem na dowolną funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$.

$$U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\,\vec{r}\,\omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r})$.

Przypomnijmy, że

$$|\alpha'\rangle = U_P\,|\alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\alpha'| = \langle\alpha|\,U_P^\dagger,$$

a więc element macierzowy operatora $\vec{r}$ pomiędzy stanami odbitymi wynosi

$$\langle\beta'|\vec{r}|\alpha'\rangle = \langle\beta\,|U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\,|\alpha\rangle\,.$$

Aby obliczyć $U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P$ podziałajmy tym operatorem na dowolną funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$.

$$U_P^\dagger\,\vec{r}\,U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\,\vec{r}\,\omega\psi_\alpha(-\vec{r}),$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = \omega\psi_\alpha(-\vec{r})$.

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right)$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) =$$

Inwersja przestrzenna

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P = -\vec{r}.$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\;\vec{r}\;U_P\psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\;\vec{r}\;U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\;\vec{p}\;U_P = -\vec{p}.$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger \; \vec{r} \; U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger \; \vec{r} \; U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger \; \vec{p} \; U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$U_P^\dagger \; \vec{L} \; U_P \quad =$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$U_P^\dagger\ \vec{L}\ U_P = U_P^\dagger\ \vec{r} \times \vec{p}\ U_P =$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger \; \vec{r} \; U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger \; \vec{r} \; U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger \; \vec{p} \; U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$U_P^\dagger \; \vec{L} \; U_P \quad = \quad U_P^\dagger \; \vec{r} \times \vec{p} \; U_P = U_P^\dagger \; \vec{r} \; U_P \times U_P^\dagger \; \vec{p} \; U_P =$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$U_P^\dagger\ \vec{L}\ U_P \quad = \quad U_P^\dagger\ \vec{r} \times \vec{p}\ U_P = U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \times U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = (-\vec{r}) \times (-\vec{p})$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger\left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_P^\dagger\ \vec{L}\ U_P &= U_P^\dagger\ \vec{r} \times \vec{p}\ U_P = U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \times U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) \\ &= \end{aligned}$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\, \vec{p}\, U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_P^\dagger\, \vec{L}\, U_P &= U_P^\dagger\, \vec{r} \times \vec{p}\, U_P = U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P \times U_P^\dagger\, \vec{p}\, U_P = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) \\ &= \vec{r} \times \vec{p} \end{aligned}$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\, \vec{p}\, U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_P^\dagger\, \vec{L}\, U_P &= U_P^\dagger\, \vec{r} \times \vec{p}\, U_P = U_P^\dagger\, \vec{r}\, U_P \times U_P^\dagger\, \vec{p}\, U_P = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) \\ &= \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}. \end{aligned}$$

Ale $U_P^\dagger \psi_\alpha(\vec{r}) = \omega^{-1}\psi_\alpha(-\vec{r})$, więc

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \psi_\alpha(\vec{r}) = U_P^\dagger \left(\vec{r}\omega\psi_\alpha(-\vec{r})\right) = \omega^{-1}(-\vec{r})\omega\psi_\alpha(\vec{r}) = -\vec{r}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Ponieważ funkcja $\psi_\alpha(\vec{r})$ jest dowolna, więc otrzymujemy

$$U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P = -\vec{r}.$$

Dla operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ otrzymamy w związku z tym

$$U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = -\vec{p}.$$

Dla operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_P^\dagger\ \vec{L}\ U_P &= U_P^\dagger\ \vec{r} \times \vec{p}\ U_P = U_P^\dagger\ \vec{r}\ U_P \times U_P^\dagger\ \vec{p}\ U_P = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) \\ &= \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}. \end{aligned}$$

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu,

Inwersja przestrzenna

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak,

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak, nazywamy *wektorami,*

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak, nazywamy *wektorami*, a operator momentu pędu,

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak, nazywamy *wektorami,* a operator momentu pędu, który nie zmienia znaku,

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak, nazywamy *wektorami*, a operator momentu pędu, który nie zmienia znaku, nazywamy *pseudowektorem*.

Operator U_P działa na współrzędne przestrzenne, a nie działa na spin, więc dla całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ otrzymamy również

$$U_P^\dagger \, \vec{J} \, U_P = \vec{J}.$$

Ze względu na prawo transformacyjne przy inwersji przestrzennej operatory położenia i pędu, które zmieniają znak, nazywamy *wektorami,* a operator momentu pędu, który nie zmienia znaku, nazywamy *pseudowektorem.*

Odwrócenie w czasie układu fizycznego w stanie reprezentowanym przez wektor $|\alpha\rangle$ albo funkcję falową ψ_α spowoduje jego przejście w stan reprezentowany przez wektor $|\alpha'\rangle$ albo funkcję falową $\psi_{\alpha'}$ ewoluującą w kierunku przeciwnym w czasie.

Klasyczne równania ruchu, które tak jak np. równanie Newtona

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

zawierają drugą pochodną czasową, są niezmiennicze względem odwrócenia czasu

$$t \;\rightarrow\; t' = T\,t = -t.$$

Odwrócenie w czasie

Odwrócenie w czasie układu fizycznego w stanie reprezentowanym przez wektor $|\alpha\rangle$ albo funkcję falową ψ_α spowoduje jego przejście w stan reprezentowany przez wektor $|\alpha'\rangle$ albo funkcję falową $\psi_{\alpha'}$ ewoluującą w kierunku przeciwnym w czasie.
Klasyczne równania ruchu, które tak jak np. równanie Newtona

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

zawierają drugą pochodną czasową, są niezmiennicze względem odwrócenia czasu

$$t \;\rightarrow\; t' = T\, t = -t.$$

W przestrzeni Hilberta operacja odwrócenia czasu jest reprezentowana przez operator A_T:

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = \left|\alpha'\right\rangle \quad \text{lub} \quad A_T \psi_\alpha = \psi_{\alpha'}.$$

W przestrzeni Hilberta operacja odwrócenia czasu jest reprezentowana przez operator A_T:

$$A_T\,|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad \text{lub} \quad A_T\psi_\alpha = \psi_{\alpha'}.$$

Symetria względem odwrócenia czasu jest łamana tylko w oddziaływaniach słabych.

Odwrócenie w czasie

W przestrzeni Hilberta operacja odwrócenia czasu jest reprezentowana przez operator A_T:

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = \left|\alpha'\right\rangle \quad \text{lub} \quad A_T\psi_\alpha = \psi_{\alpha'}.$$

Symetria względem odwrócenia czasu jest łamana tylko w oddziaływaniach słabych.

Jest to stosunkowo niewielki efekt obserwowany w układzie długożyciowych kaonów i mezonów B.

W przestrzeni Hilberta operacja odwrócenia czasu jest reprezentowana przez operator A_T:

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = \left|\alpha'\right\rangle \quad \text{lub} \quad A_T \psi_\alpha = \psi_{\alpha'}.$$

Symetria względem odwrócenia czasu jest łamana tylko w oddziaływaniach słabych.

Jest to stosunkowo niewielki efekt obserwowany w układzie długożyciowych kaonów i mezonów B.

Jeżeli go pominiemy, to możemy przyjąć, że jeżeli stan $\left|k\right\rangle$ jest stanem własnym hamiltonianu H o wartości własnej E_k, to stan odwrócony w czasie $A_T \left|k\right\rangle$ również jest stanem własnym H o tej samej wartości własnej E_k.

Odwrócenie w czasie

W przestrzeni Hilberta operacja odwrócenia czasu jest reprezentowana przez operator A_T:

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = \left|\alpha'\right\rangle \quad \text{lub} \quad A_T \psi_\alpha = \psi_{\alpha'}.$$

Symetria względem odwrócenia czasu jest łamana tylko w oddziaływaniach słabych.
Jest to stosunkowo niewielki efekt obserwowany w układzie długożyciowych kaonów i mezonów B.
Jeżeli go pominiemy, to możemy przyjąć, że jeżeli stan $|k\rangle$ jest stanem własnym hamiltonianu H o wartości własnej E_k, to stan odwrócony w czasie $A_T\,|k\rangle$ również jest stanem własnym H o tej samej wartości własnej E_k.

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} |k\rangle .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$|\alpha(t)\rangle \quad = \quad e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\alpha\rangle$$

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$|\alpha(t)\rangle \quad = \quad e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle$$

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$|\alpha(t)\rangle \quad = \quad e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |k\rangle$$

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$|\alpha(t)\rangle \;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |k\rangle$$

$$=$$

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |k\rangle \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \, |k\rangle \, , \end{aligned}$$

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |k\rangle \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \, |k\rangle \, , \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równanie $H\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle$,

Odwrócenie w czasie

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ w pewnej chwili czasu, powiedzmy $t = 0$, można rozłożyć na stany własne $|k\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle \, .$$

Stan $|\alpha\rangle$ możemy przekształcić na dwa sposoby.
Najpierw poddamy go ewolucji czasowej do chwili t, co daje stan

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \, |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \, |k\rangle \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \, |k\rangle \, , \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równanie $H \, |k\rangle = E_k \, |k\rangle$,

Odwrócenie w czasie

a w chwili t odwrócimy czas otrzymując stan

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T\,|\alpha(t)\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T\,|k\rangle\,,$$

Odwrócenie w czasie

a w chwili t odwrócimy czas otrzymując stan

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T\,|\alpha(t)\rangle \,= \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T\,|k\rangle\,,$$

gdzie założyliśmy, że operator A_T jest liniowy.

Odwrócenie w czasie

a w chwili t odwrócimy czas otrzymując stan

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T\,|\alpha(t)\rangle\, = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T\,|k\rangle\,,$$

gdzie założyliśmy, że operator A_T jest liniowy.

Odwrócenie w czasie

Drugi sposób polega na tym, że najpierw odwrócimy czas w chwili $t = 0$, co przy założeniu liniowości A_T daje stan

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \left|k\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} A_T \left|k\right\rangle ,$$

który poddamy ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymując stan

$$\left|\alpha(-t)\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T \left|k\right\rangle .$$

Drugi sposób polega na tym, że najpierw odwrócimy czas w chwili $t = 0$, co przy założeniu liniowości A_T daje stan

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \left|k\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} A_T \left|k\right\rangle ,$$

który poddamy ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymując stan

$$\left|\alpha(-t)\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T \left|k\right\rangle .$$

Porównując to ze wzorem

$$\left|\alpha(-t)\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T \left|k\right\rangle ,$$

otrzymanym przed chwilą

Odwrócenie w czasie

Drugi sposób polega na tym, że najpierw odwrócimy czas w chwili $t = 0$, co przy założeniu liniowości A_T daje stan

$$A_T \left|\alpha\right\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} \left|k\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} A_T \left|k\right\rangle ,$$

który poddamy ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymując stan

$$\left|\alpha(-t)\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T \left|k\right\rangle .$$

Porównując to ze wzorem

$$\left|\alpha(-t)\right\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T \left|k\right\rangle ,$$

otrzymanym przed chwilą widzimy sprzeczność.

Odwrócenie w czasie

Drugi sposób polega na tym, że najpierw odwrócimy czas w chwili $t = 0$, co przy założeniu liniowości A_T daje stan

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

który poddamy ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymując stan

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T |k\rangle .$$

Porównując to ze wzorem

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} A_T |k\rangle ,$$

otrzymanym przed chwilą widzimy sprzeczność.

Odwrócenie w czasie

Sprzeczności tej uniknęlibyśmy, gdybyśmy założyli, że A_T jest operatorem antyliniowym, tzn. że

$$A_T \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A_T \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A_T \left|\psi_2\right\rangle ,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.

Odwrócenie w czasie

Sprzeczności tej uniknęlibyśmy, gdybyśmy założyli, że A_T jest operatorem antyliniowym, tzn. że

$$A_T \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A_T \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A_T \left|\psi_2\right\rangle,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.

Ponieważ operator A_T reprezentuje operację symetrii, to musi on być operatorem antyunitarnym.

Sprzeczności tej uniknęlibyśmy, gdybyśmy założyli, że A_T jest operatorem antyliniowym, tzn. że

$$A_T \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A_T \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A_T \left|\psi_2\right\rangle ,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.
Ponieważ operator A_T reprezentuje operację symetrii, to musi on być operatorem antyunitarnym.

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle =$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle =$$

Odwrócenie w czasie

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle \, .$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle =$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k}^* e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle \, .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} |k\rangle =$$

Odwrócenie w czasie

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

a w wyniku ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymalibyśmy stan

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

a w wyniku ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymalibyśmy stan

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum_k e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

a w wyniku ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymalibyśmy stan

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum_k e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Zatem, oba sposoby dają ten sam wynik.

Przy tym założeniu działanie operatorem A_T na stan $|\alpha(t)\rangle$ dałoby

$$|\alpha(-t)\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Z kolei odwracając czas w chwili $t = 0$ otrzymalibyśmy

$$A_T |\alpha\rangle = A_T \sum_k c_{\alpha k} |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle ,$$

a w wyniku ewolucji czasowej do chwili $-t$ otrzymalibyśmy stan

$$|\alpha(-t)\rangle = \sum_k e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} c^*_{\alpha k} A_T |k\rangle = \sum_k c^*_{\alpha k} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} A_T |k\rangle .$$

Zatem, oba sposoby dają ten sam wynik.

Odwrócenie w czasie

Podziałajmy operatorem A_T na obie strony równania Schrödingera

$$A_T i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = A_T H |\alpha(t)\rangle \, .$$

Korzystając z antyliniowości operatora A_T oraz wykorzystując fakt, że reprezentuje on operację symetrii,

Odwrócenie w czasie

Podziałajmy operatorem A_T na obie strony równania Schrödingera

$$A_T i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = A_T H |\alpha(t)\rangle .$$

Korzystając z antyliniowości operatora A_T oraz wykorzystując fakt, że reprezentuje on operację symetrii, dla której $[A_T, H] = 0$,

Odwrócenie w czasie

Podziałajmy operatorem A_T na obie strony równania Schrödingera

$$A_T i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = A_T H |\alpha(t)\rangle .$$

Korzystając z antyliniowości operatora A_T oraz wykorzystując fakt, że reprezentuje on operację symetrii, dla której $[A_T, H] = 0$, otrzymamy

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(A_T |\alpha(t)\rangle\right) = H A_T |\alpha(t)\rangle .$$

Uwzględniając, że $A_T |\alpha(t)\rangle = |\alpha(-t)\rangle$ oraz, Podziałajmy operatorem A_T na obie strony równania Schrödingera

$$A_T i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = A_T H |\alpha(t)\rangle .$$

Korzystając z antyliniowości operatora A_T oraz wykorzystując fakt, że reprezentuje on operację symetrii, dla której $[A_T, H] = 0$, otrzymamy

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(A_T |\alpha(t)\rangle\right) = H A_T |\alpha(t)\rangle .$$

Uwzględniając, że $A_T |\alpha(t)\rangle = |\alpha(-t)\rangle$ oraz, że

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}$$

Podziałajmy operatorem A_T na obie strony równania Schrödingera

$$A_T i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = A_T H |\alpha(t)\rangle .$$

Korzystając z antyliniowości operatora A_T oraz wykorzystując fakt, że reprezentuje on operację symetrii, dla której $[A_T, H] = 0$, otrzymamy

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(A_T |\alpha(t)\rangle\right) = H A_T |\alpha(t)\rangle .$$

Uwzględniając, że $A_T |\alpha(t)\rangle = |\alpha(-t)\rangle$ oraz, że

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}$$

otrzymamy

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\,|\alpha(-t)\rangle = H\,|\alpha(-t)\rangle\,.$$

Jest to równanie Schrödingera różniące się od wyjściowego jedynie zamianą $t \;\rightarrow\; -t$.

otrzymamy

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left|\alpha(-t)\right\rangle = H\left|\alpha(-t)\right\rangle .$$

Jest to równanie Schrödingera różniące się od wyjściowego jedynie zamianą $t \;\rightarrow\; -t$.

Antyunitarny operator odwrócenia w czasie A_T możemy napisać jako złożenie

$$A_T = U_T K$$

otrzymamy

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)} \left|\alpha(-t)\right\rangle = H \left|\alpha(-t)\right\rangle .$$

Jest to równanie Schrödingera różniące się od wyjściowego jedynie zamianą $t \rightarrow -t$.
Antyunitarny operator odwrócenia w czasie A_T możemy napisać jako złożenie

$$A_T = U_T K$$

operatora unitarnego U_T

otrzymamy

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)} |\alpha(-t)\rangle = H |\alpha(-t)\rangle .$$

Jest to równanie Schrödingera różniące się od wyjściowego jedynie zamianą $t \to -t$.
Antyunitarny operator odwrócenia w czasie A_T możemy napisać jako złożenie

$$A_T = U_T K$$

operatora unitarnego U_T i operatora sprzężenia zespolonego K, zdefiniowanego wzorem

$$K\psi = \psi^*.$$

Odwrócenie w czasie

otrzymamy

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left|\alpha(-t)\right\rangle = H\left|\alpha(-t)\right\rangle.$$

Jest to równanie Schrödingera różniące się od wyjściowego jedynie zamianą $t \;\rightarrow\; -t$.
Antyunitarny operator odwrócenia w czasie A_T możemy napisać jako złożenie

$$A_T = U_T K$$

operatora unitarnego U_T i operatora sprzężenia zespolonego K, zdefiniowanego wzorem

$$K\psi = \psi^*.$$

Odwrócenie w czasie

Spełnienie warunku symetrii $[A_T, H] = 0$ pociąga spełnienie warunku

$$A_T H A_T^\dagger = H.$$

Dla zespolonego hamiltonianu H pociągałoby to konieczność spełnienia warunku

Odwrócenie w czasie

Spełnienie warunku symetrii $[A_T, H] = 0$ pociąga spełnienie warunku

$$A_T H A_T^\dagger = H.$$

Dla zespolonego hamiltonianu H pociągałoby to konieczność spełnienia warunku

$$A_T H A_T^\dagger = U_T K H K^\dagger U_T^\dagger = U_T H^* U_T^\dagger = H,$$

Odwrócenie w czasie

Spełnienie warunku symetrii $[A_T, H] = 0$ pociąga spełnienie warunku

$$A_T H A_T^\dagger = H.$$

Dla zespolonego hamiltonianu H pociągałoby to konieczność spełnienia warunku

$$A_T H A_T^\dagger = U_T K H K^\dagger U_T^\dagger = U_T H^* U_T^\dagger = H,$$

a to z reguły jest niemożliwe.

Spełnienie warunku symetrii $[A_T, H] = 0$ pociąga spełnienie warunku

$$A_T H A_T^\dagger = H.$$

Dla zespolonego hamiltonianu H pociągałoby to konieczność spełnienia warunku

$$A_T H A_T^\dagger = U_T K H K^\dagger U_T^\dagger = U_T H^* U_T^\dagger = H,$$

a to z reguły jest niemożliwe.
Dlatego układ fizyczny reprezentowany przez zespolony hamiltonian nie jest niezmienniczy względem odwrócenia czasu.

Spełnienie warunku symetrii $[A_T, H] = 0$ pociąga spełnienie warunku

$$A_T H A_T^\dagger = H.$$

Dla zespolonego hamiltonianu H pociągałoby to konieczność spełnienia warunku

$$A_T H A_T^\dagger = U_T K H K^\dagger U_T^\dagger = U_T H^* U_T^\dagger = H,$$

a to z reguły jest niemożliwe.
Dlatego układ fizyczny reprezentowany przez zespolony hamiltonian nie jest niezmienniczy względem odwrócenia czasu.

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$,

Odwrócenie w czasie

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.

Odwrócenie w czasie

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \rightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow -\vec{L}$.

Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$,

Odwrócenie w czasie

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \;\rightarrow\; -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \;\rightarrow\; -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \;\rightarrow\; -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \;\rightarrow\; -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.

Odwrócenie w czasie

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K,$$

Odwrócenie w czasie

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K, \qquad \text{tzn.} \quad U_T = \mathbb{I}.$$

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K, \qquad \text{tzn.} \quad U_T = \mathbb{I}.$$

Dla cząstki o niezerowym spinie powinny zachodzić związki

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K, \qquad \text{tzn.} \quad U_T = \mathbb{I}.$$

Dla cząstki o niezerowym spinie powinny zachodzić związki

$$A_T^\dagger \vec{S} A_T = -\vec{S}$$

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \longrightarrow -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \longrightarrow -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K, \qquad \text{tzn.} \quad U_T = \mathbb{I}.$$

Dla cząstki o niezerowym spinie powinny zachodzić związki

$$A_T^\dagger \vec{S} A_T = -\vec{S} \quad \text{i} \quad A_T^\dagger \vec{J} A_T = -\vec{J},$$

Operacja odwrócenia czasu nie zmienia wektora położenia cząstki, $\vec{r} \to \vec{r}$, natomiast zmienia znak pędu, $\vec{p} \to -\vec{p}$, i orbitalnego momentu pędu cząstki, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to -\vec{L}$.
Podobnie, zmianie musi ulec spinowy, $\vec{S} \to -\vec{S}$, i całkowity moment pędu, $\vec{J} \to -\vec{J}$.
Konkretna postać operatora A_T zależy od wyboru reprezentacji.
Dla cząstki bezspinowej w reprezentacji położeniowej, w której $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, a $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wystarczy przyjąć

$$A_T = K, \qquad \text{tzn.} \quad U_T = \mathbb{I}.$$

Dla cząstki o niezerowym spinie powinny zachodzić związki

$$A_T^{\dagger}\vec{S}A_T = -\vec{S} \quad \text{i} \quad A_T^{\dagger}\vec{J}A_T = -\vec{J},$$

które możemy przepisać w formie

$$\vec{S}A_T = -A_T\vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{J}A_T = -A_T\vec{J}.$$

Dla spinu $s = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,$$

które możemy przepisać w formie

$$\vec{S}A_T = -A_T\vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{J}A_T = -A_T\vec{J}.$$

Dla spinu $s = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,$$

gdzie macierze Pauliego σ_i dane są wzorami

które możemy przepisać w formie

$$\vec{S}A_T = -A_T\vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{J}A_T = -A_T\vec{J}.$$

Dla spinu $s = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,$$

gdzie macierze Pauliego σ_i dane są wzorami

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odwrócenie w czasie

które możemy przepisać w formie

$$\vec{S}A_T = -A_T\vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{J}A_T = -A_T\vec{J}.$$

Dla spinu $s = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,$$

gdzie macierze Pauliego σ_i dane są wzorami

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Widzimy, że S_1 i S_3 są rzeczywiste, a S_2 jest czysto urojone.

które możemy przepisać w formie

$$\vec{S}A_T = -A_T\vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{J}A_T = -A_T\vec{J}.$$

Dla spinu $s = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i,$$

gdzie macierze Pauliego σ_i dane są wzorami

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Widzimy, że S_1 i S_3 są rzeczywiste, a S_2 jest czysto urojone.

Odwrócenie w czasie

Podobnie, dla spinu $s = 1$ znaleźliśmy

$$S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Znów widzimy, że S_1 i S_3 są rzeczywiste, a S_2 jest czysto urojone.

Podobnie, dla spinu $s = 1$ znaleźliśmy

$$S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Znów widzimy, że S_1 i S_3 są rzeczywiste, a S_2 jest czysto urojone.

Ponieważ operator odbicia czasowego przedstawiliśmy jako złożenie

$$A_T = U_T K,$$

to w takiej reprezentacji, dla S_2 wystarczyłoby przyjąć

$$U_T = \mathbb{I} \qquad \Rightarrow \qquad A_T = K.$$

Taki wybór nie byłby jednak dobry, gdyż operacja sprzężenia zespolonego nie zmienia rzeczywistych macierzy S_1 i S_3.

Ponieważ operator odbicia czasowego przedstawiliśmy jako złożenie

$$A_T = U_T K,$$

to w takiej reprezentacji, dla S_2 wystarczyłoby przyjąć

$$U_T = \mathbb{I} \qquad \Rightarrow \qquad A_T = K.$$

Taki wybór nie byłby jednak dobry, gdyż operacja sprzężenia zespolonego nie zmienia rzeczywistych macierzy S_1 i S_3.
Aby zmienić ich znak, należałoby wykonać obrót o kąt π względem osi Oy.

Odwrócenie w czasie

Ponieważ operator odbicia czasowego przedstawiliśmy jako złożenie

$$A_T = U_T K,$$

to w takiej reprezentacji, dla S_2 wystarczyłoby przyjąć

$$U_T = \mathbb{I} \qquad \Rightarrow \qquad A_T = K.$$

Taki wybór nie byłby jednak dobry, gdyż operacja sprzężenia zespolonego nie zmienia rzeczywistych macierzy S_1 i S_3.
Aby zmienić ich znak, należałoby wykonać obrót o kąt π względem osi Oy.

Odwrócenie w czasie

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}}$$

Odwrócenie w czasie

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}}$$

$$=$$

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \end{aligned}$$

Odwrócenie w czasie

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że składowe operatora $\vec{L}$ komutują ze składowymi operator spinu $\vec{S}$.

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że składowe operatora $\vec{L}$ komutują ze składowymi operator spinu $\vec{S}$. Zatem unitarny operator obrotu ma w tym przypadku postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}}.$$

Unitarny operator obrotu o kąt dany wektorem $\vec{\phi}$ ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Rozważmy działanie tego operatora na dowolną funkcję operatora $\vec{S}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} f(\vec{S}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}} \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że składowe operatora $\vec{L}$ komutują ze składowymi operator spinu $\vec{S}$. Zatem unitarny operator obrotu ma w tym przypadku postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}}.$$

Odwrócenie w czasie

Dlatego operator obrotu o kąt π względem osi Oy ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2}.$$

Zauważmy, że ten operator nie zmienia drugiej składowej operatora spinu

$$e^{\frac{i}{\hbar}\pi S_2} S_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2} = S_2,$$

gdyż $[S_2, S_2] = S_2 S_2 - S_2 S_2 = 0.$

Odwrócenie w czasie

Dlatego operator obrotu o kąt π względem osi Oy ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2}.$$

Zauważmy, że ten operator nie zmienia drugiej składowej operatora spinu

$$e^{\frac{i}{\hbar}\pi S_2} S_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2} = S_2,$$

gdyż $[S_2, S_2] = S_2 S_2 - S_2 S_2 = 0$.
Zatem operator odwrócenia w czasie będzie miał w tej reprezentacji postać

$$A_T = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2} K.$$

Dlatego operator obrotu o kąt π względem osi Oy ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2}.$$

Zauważmy, że ten operator nie zmienia drugiej składowej operatora spinu

$$e^{\frac{i}{\hbar}\pi S_2} S_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2} = S_2,$$

gdyż $[S_2, S_2] = S_2 S_2 - S_2 S_2 = 0$.
Zatem operator odwrócenia w czasie będzie miał w tej reprezentacji postać

$$A_T = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_2} K.$$

Zadanie. Pokazać, że operator A_T dla spinu $\frac{1}{2}$ można zapisać w formie

$$A_T = -i\sigma_2 K,$$

gdzie σ_2 jest drugą macierzą Pauliego.