Operator momentu pędu

Składanie stanów własnych operatora momentu pędu

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad {\vec{J}^2}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^{2\,\dagger} = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$,

Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad {\vec{J}^2}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$, a te nie komutują z sobą,

Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^{2\,\dagger} = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$, a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację,

Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^{2\,\dagger} = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$, a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych,

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^{2\,\dagger} = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$, a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych, w której jedna ze składowych $\vec{J}$, np. J_3 i $\vec{J}^2$ są diagonalne.

Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu $\vec{J}$ jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^{2\,\dagger} = \vec{J}^2, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator $\vec{J}^2$ komutuje ze składowymi operatora $\vec{J}$, a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych, w której jedna ze składowych $\vec{J}$, np. J_3 i $\vec{J}^2$ są diagonalne.

Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi,

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.

Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \, |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 \, |jm\rangle \,, \\ J_3 \, |jm\rangle &= m\hbar \, |jm\rangle \,, \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.
Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \left| jm \right\rangle &= f(j)\hbar^2 \left| jm \right\rangle , \\ J_3 \left| jm \right\rangle &= m\hbar \left| jm \right\rangle , \end{aligned}$$

gdzie $f(j)$ jest dowolną, różnowartościową funkcją j.

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.
Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \left|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2 \left|jm\right\rangle, \\ J_3 \left|jm\right\rangle &= m\hbar \left|jm\right\rangle, \end{aligned}$$

gdzie $f(j)$ jest dowolną, różnowartościową funkcją j.
Założymy również, że stany $\left|jm\right\rangle$ są unormowane,

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.
Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \left|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2 \left|jm\right\rangle , \\ J_3 \left|jm\right\rangle &= m\hbar \left|jm\right\rangle , \end{aligned}$$

gdzie $f(j)$ jest dowolną, różnowartościową funkcją j.
Założymy również, że stany $\left|jm\right\rangle$ są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.
Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle , \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle , \end{aligned}$$

gdzie $f(j)$ jest dowolną, różnowartościową funkcją j.
Założymy również, że stany $|jm\rangle$ są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

gdzie $\delta_{jj'}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca.

Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 będziemy numerować liczbami j i m, o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory $\vec{J}^2$ i J_3 są hermitowskie.
Przez analogię do operatora orbiatalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \left|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2 \left|jm\right\rangle , \\ J_3 \left|jm\right\rangle &= m\hbar \left|jm\right\rangle , \end{aligned}$$

gdzie $f(j)$ jest dowolną, różnowartościową funkcją j.
Założymy również, że stany $\left|jm\right\rangle$ są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

gdzie $\delta_{jj'}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca.

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle = f(j')\hbar^2 \left\langle jm|j'm'\right\rangle =$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle = f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle = f(j')\hbar^2 \left\langle jm|j'm'\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

$$\left\langle jm|J_3|j'm'\right\rangle$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle = f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'},$$
$$\langle jm|J_3|j'm'\rangle =$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\begin{aligned}\left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'},\\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar\langle jm|j'm'\rangle =\end{aligned}$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle &= f(j')\hbar^2 \left\langle jm|j'm'\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \left\langle jm|J_3|j'm'\right\rangle &= m'\hbar\left\langle jm|j'm'\right\rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle &= f(j')\hbar^2\left\langle jm|j'm'\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \left\langle jm|J_3|j'm'\right\rangle &= m'\hbar\left\langle jm|j'm'\right\rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_\pm^\dagger = J_\mp .$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_\pm^\dagger = J_\mp.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_3, J_-] = -\hbar J_-, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3.$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów $\vec{J}^2$ i J_3 mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle &= f(j')\hbar^2 \left\langle jm|j'm'\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \left\langle jm|J_3|j'm'\right\rangle &= m'\hbar \left\langle jm|j'm'\right\rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_\pm^\dagger = J_\mp.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_3, J_-] = -\hbar J_-, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3.$$

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle \, .$$

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle .$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \widetilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \widetilde{m}'| \, \mathrm{d}\tilde{j}' \mathrm{d}\widetilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle .$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \widetilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \widetilde{m}'| \, \mathrm{d}\tilde{j}' \mathrm{d}\widetilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów $\vec{J}^2$ i J_3, a po prawej stronie relacji $\equiv$ pominęliśmy symbole sumowania i całkowania.

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle .$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \tilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \tilde{m}'| \, \mathrm{d}\tilde{j}' \mathrm{d}\tilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów $\vec{J}^2$ i J_3, a po prawej stronie relacji $\equiv$ pominęliśmy symbole sumowania i całkowania. Wstawiając operator jednostkowy pomiędzy operatory J_3 i J_+ dostaniemy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_3 \; |j' m'\rangle \langle j' m'| \; J_+ | jm \rangle \quad &- \quad \langle j'' m'' \; | J_+ \, |j' m'\rangle \langle j' m'| \; J_3 | jm \rangle \\ &= \quad \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle . \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle \,.$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m' \rangle \langle j' m' | + \int |\tilde{j}' \widetilde{m}' \rangle \langle \tilde{j}' \widetilde{m}' | \, \mathrm{d}\tilde{j}' \mathrm{d}\widetilde{m}' \equiv |j' m' \rangle \langle j' m' |$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów $\vec{J}^2$ i J_3, a po prawej stronie relacji $\equiv$ pominęliśmy symbole sumowania i całkowania. Wstawiając operator jednostkowy pomiędzy operatory J_3 i J_+ dostaniemy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_3 \, |j' m' \rangle \langle j' m' | \, J_+ | jm \rangle \quad &- \quad \langle j'' m'' \, | J_+ \, |j' m' \rangle \langle j' m' | \, J_3 | jm \rangle \\ &= \quad \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle \,. \end{aligned}$$

$$\langle j''m''|J_3|j'm'\rangle \langle j'm'|J_+|jm\rangle - \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle \langle j'm'|J_3|jm\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle \,.$$

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora J_3.

$$m'\hbar \langle j''m''|j'm'\rangle \langle j'm'|J_+|jm\rangle - \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle m\hbar \langle j'm'|jm\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle$$

$$\langle j''m''|J_3|j'm'\rangle \langle j'm'|J_+|jm\rangle - \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle \langle j'm'|J_3|jm\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle .$$

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora J_3.

$$m'\hbar \langle j''m''|j'm'\rangle \langle j'm'|J_+|jm\rangle - \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle m\hbar \langle j'm'|jm\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle$$

Wykorzystajmy normalizację stanów $|jm\rangle$

$$m'\hbar\delta_{j''j'}\delta_{m''m'} \langle j'm'|J_+|jm\rangle - m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm} \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle$$

i wykonajmy sumowanie po j' i m', wtedy otrzymamy

$$m''\hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle - m\hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle = \hbar \langle j''m''|J_+|jm\rangle .$$

$$\begin{aligned}\langle j''m''|J_3|j'm'\rangle\langle j'm'|J_+|jm\rangle &- \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle\langle j'm'|J_3|jm\rangle \\ &= \hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle\,.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora J_3.

$$\begin{aligned}m'\hbar\langle j''m''|j'm'\rangle\langle j'm'|J_+|jm\rangle &- \langle j''m''|J_+|j'm'\rangle\, m\hbar\langle j'm'|jm\rangle \\ &= \hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle\end{aligned}$$

Wykorzystajmy normalizację stanów $|jm\rangle$

$$\begin{aligned}m'\hbar\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_+|jm\rangle &- m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_+|j'm'\rangle \\ &= \hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle\end{aligned}$$

i wykonajmy sumowanie po j' i m', wtedy otrzymamy

$$m''\hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle - m\hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle = \hbar\langle j''m''|J_+|jm\rangle\,.$$

Stany własne momentu pędu

Podzielmy obie strony przez $\hbar$, przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora J_+ poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$\left[\vec{J}^2, J_i \right] = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{J}^2, J_\pm \right] = 0.$$

Podzielmy obie strony przez $\hbar$, przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora J_+ poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1)\,\langle j''m''|J_+|jm\rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{J}^2, J_\pm\right] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_\pm - J_\pm \vec{J}^2 = 0.$$

Podzielmy obie strony przez $\hbar$, przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora J_+ poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1)\,\langle j''m''|J_+|jm\rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{J}^2, J_\pm\right] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_\pm - J_\pm \vec{J}^2 = 0.$$

$$\left\langle j''m''|\vec{J}^2 J_\pm|jm\right\rangle - \left\langle j''m''|J_\pm \vec{J}^2|jm\right\rangle = 0,$$

a wstawiając odpowiednio operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$ otrzymamy

$$\left\langle j''m''|\vec{J}^2|j'm'\right\rangle \langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - \langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle \left\langle j'm'|\vec{J}^2|jm\right\rangle = 0.$$

Podzielmy obie strony przez $\hbar$, przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora J_+ poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$\left[\vec{J}^2, J_i \right] = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{J}^2, J_\pm \right] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_\pm - J_\pm \vec{J}^2 = 0.$$

$$\left\langle j'' m'' | \vec{J}^2 J_\pm | jm \right\rangle - \left\langle j'' m'' | J_\pm \vec{J}^2 | jm \right\rangle = 0,$$

a wstawiając odpowiednio operator jednostkowy $|j' m'\rangle \langle j' m'|$ otrzymamy

$$\left\langle j'' m'' | \vec{J}^2 | j' m' \right\rangle \langle j' m' | J_\pm | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_\pm | j' m' \rangle \left\langle j' m' | \vec{J}^2 | jm \right\rangle = 0.$$

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora $\vec{J}^2$ i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $\hbar^2$ i wykonując sumowanie po j' i m' otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora $\vec{J}^2$ i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $\hbar^2$ i wykonując sumowanie po j' i m' otrzymamy

$$\left(f(j'') - f(j)\right)\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j)$$

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora $\vec{J}^2$ i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $\hbar^2$ i wykonując sumowanie po j' i m' otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \qquad \Leftrightarrow \qquad j'' = j,$$

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora $\vec{J}^2$ i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $\hbar^2$ i wykonując sumowanie po j' i m' otrzymamy

$$\left(f(j'') - f(j)\right)\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \qquad \Leftrightarrow \qquad j'' = j,$$

gdyż funkcja $f(j)$ jest różnowartościowa,

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że $|jm\rangle$ są stanami własnymi operatora $\vec{J}^2$ i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_\pm|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $\hbar^2$ i wykonując sumowanie po j' i m' otrzymamy

$$\left(f(j'') - f(j)\right)\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \qquad \Leftrightarrow \qquad j'' = j,$$

gdyż funkcja $f(j)$ jest różnowartościowa,

albo jeśli

$$\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych j, j'', m, m'', dlatego widzimy, że tylko elementy macierzowe dla $j'' = j$, a więc elementy postaci

$$\langle jm''|J_\pm|jm\rangle$$

mogą być niezerowe,

albo jeśli

$$\langle j''m''|J_\pm|jm\rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych j, j'', m, m'', dlatego widzimy, że tylko elementy macierzowe dla $j'' = j$, a więc elementy postaci

$$\langle jm''|J_\pm|jm\rangle$$

mogą być niezerowe, a zatem macierze operatorów $J_\pm$ są diagonalne w j.

albo jeśli

$$\langle j'' m'' | J_{\pm} | jm \rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych j, j'', m, m'', dlatego widzimy, że tylko elementy macierzowe dla $j'' = j$, a więc elementy postaci

$$\langle jm'' | J_{\pm} | jm \rangle$$

mogą być niezerowe, a zatem macierze operatorów $J_{\pm}$ są diagonalne w j.

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1)\langle j''m''|J_+|jm\rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1)\langle jm''|J_+|jm\rangle = 0,$$

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1)\,\langle j''m''|J_+|jm\rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1)\,\langle jm''|J_+|jm\rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm''|J_+|jm\rangle = 0.$$

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1)\,\langle j''m''|J_+|jm\rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1)\,\langle jm''|J_+|jm\rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm''|J_+|jm\rangle = 0.$$

To oznacza, że nieznikające elementy macierzowe operatora J_+ mają postać

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle\,.$$

Stany własne momentu pędu

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

To oznacza, że nieznikające elementy macierzowe operatora J_+ mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle .$$

Ze względu na ortogonalność stanów $|jm\rangle$, równość ta implikuje związek

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle ,$$

gdzie λ_m jest liczbą zespoloną.
Widzimy, że działanie operatora J_+ na stan $|jm\rangle$ powiększa wartość własną m operatora J_3 o 1.

Ze względu na ortogonalność stanów $|jm\rangle$, równość ta implikuje związek

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle ,$$

gdzie λ_m jest liczbą zespoloną.
Widzimy, że działanie operatora J_+ na stan $|jm\rangle$ powiększa wartość własną m operatora J_3 o 1.

Zadanie. Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

Zadanie. Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm''|J_-|jm\rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm''|J_-|jm\rangle = 0,$$

Zadanie. Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

a więc nie znikają tylko elementy macierzowe postaci

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle .$$

Widzimy, że działanie operatora J_- na stan $|jm\rangle$ pomniejsza wartość własną m operatora J_3 o 1,

Zadanie. Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \qquad \text{lub} \qquad \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

a więc nie znikają tylko elementy macierzowe postaci

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle .$$

Widzimy, że działanie operatora J_- na stan $|jm\rangle$ pomniejsza wartość własną m operatora J_3 o 1, a zatem w wyniku działania operatora J_- na stan własny $|jm\rangle$ otrzymamy

$$J_- |jm\rangle = \lambda'_m \hbar |jm-1\rangle ,$$

gdzie λ'_m jest liczbą zespoloną.
Mnożąc obustronnie przez $\langle jm-1|$ otrzymamy

$$\lambda'_m \hbar = \langle jm-1|J_-|jm\rangle .$$

Stany własne momentu pędu

a zatem w wyniku działania operatora J_- na stan własny $|jm\rangle$ otrzymamy

$$J_- \, |jm\rangle = \lambda'_m \hbar \, |jm-1\rangle \, ,$$

gdzie λ'_m jest liczbą zespoloną.
Mnożąc obustronnie przez $\langle jm-1|$ otrzymamy

$$\lambda'_m \hbar = \langle jm-1|J_-|jm\rangle \, .$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.

Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle .$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.
Skorzystajmy z równania

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \lambda_m \hbar \left|jm+1\right\rangle .$$

Mnożąc obustronnie przez $\langle jm+1|$ otrzymamy

$\langle jm+1|J_+|jm\rangle =$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.
Skorzystajmy z równania

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \lambda_m \hbar \left|jm+1\right\rangle .$$

Mnożąc obustronnie przez $\langle jm+1|$ otrzymamy

$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle =$

Stany własne momentu pędu

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.
Skorzystajmy z równania

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \lambda_m \hbar \left|jm+1\right\rangle .$$

Mnożąc obustronnie przez $\langle jm+1|$ otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m\hbar|jm+1\rangle = \lambda_m\hbar \left\langle jm+1|jm+1\right\rangle =$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.
Skorzystajmy z równania

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \lambda_m \hbar \left|jm+1\right\rangle .$$

Mnożąc obustronnie przez $\langle jm+1|$ otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar \langle jm+1|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar.$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami λ_m i λ'_m.
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle .$$

Mnożąc obustronnie przez $\langle jm+1|$ otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m\hbar|jm+1\rangle = \lambda_m\hbar \langle jm+1|jm+1\rangle = \lambda_m\hbar.$$

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\left\langle jm|J_+^\dagger|jm+1\right\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\left\langle jm|J_+^\dagger|jm+1\right\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale $J_+^\dagger = J_-$, więc

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\left\langle jm|J_+^\dagger|jm+1\right\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale $J_+^\dagger = J_-$, więc

$$\langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\left\langle jm|J_+^\dagger|jm+1\right\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale $J_+^\dagger = J_-$, więc

$$\langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

λ_m^* nie jest równa $\lambda'_m = \langle jm-1|J_-|jm\rangle/\hbar$ lecz

$$\lambda_m^* = \lambda'_{m+1}.$$

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\left\langle jm|J_+^\dagger|jm+1\right\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale $J_+^\dagger = J_-$, więc

$$\langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

λ_m^* nie jest równa $\lambda_m' = \langle jm-1|J_-|jm\rangle /\hbar$ lecz

$$\lambda_m^* = \lambda_{m+1}'.$$

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m''|J_+|j' m'\rangle \langle j' m'|J_-|jm\rangle \quad &- \quad \langle j'' m''|J_-|j' m'\rangle \langle j' m'|J_+|jm\rangle \\ &= \quad 2\hbar \langle j'' m''|J_3|jm\rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j''j}\delta_{m''m}. \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle \quad &- \quad \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= \quad 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j''j} \delta_{m''m}. \end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm-1 | J_- | jm \rangle \qquad \text{i} \qquad \langle jm+1 | J_+ | jm \rangle \, ,$$

Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+J_- - J_-J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned}\langle j''m''|J_+|j'm'\rangle\langle j'm'|J_-|jm\rangle \quad &- \quad \langle j''m''|J_-|j'm'\rangle\langle j'm'|J_+|jm\rangle \\ &= \quad 2\hbar\langle j''m''|J_3|jm\rangle = 2\hbar^2 m\delta_{j''j}\delta_{m''m}.\end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle jm+1|J_+|jm\rangle\,,$$

to z sumy po j' i m' pozostaną wyrazy

$$\langle j''m''|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle j''m''|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle$$
$$= 2\hbar^2 m\delta_{j''j}\delta_{m''m}.$$

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle \quad &- \quad \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= \quad 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \qquad \mathrm{i} \qquad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle ,$$

to z sumy po j' i m' pozostaną wyrazy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle jm+1|J_+|jm\rangle\,,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\langle j''m''|J_+|jm-1\rangle\,\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle j''m''|J_-|jm+1\rangle\,\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2\hbar^2 m\delta_{j''j}\delta_{m''m}$$

nie znikają tylko gdy $j''=j$ i $m''=m$.

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle jm+1|J_+|jm\rangle\,,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\langle j''m''|J_+|jm-1\rangle\,\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle j''m''|J_-|jm+1\rangle\,\langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2\hbar^2 m\delta_{j''j}\delta_{m''m}$$

nie znikają tylko gdy $j''=j$ i $m''=m$.
Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle\,\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle\,\langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2m\hbar^2.$$

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle jm+1|J_+|jm\rangle\,,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\langle j''m''|J_+|jm-1\rangle\,\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle j''m''|J_-|jm+1\rangle\,\langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2\hbar^2 m\delta_{j''j}\delta_{m''m}$$

nie znikają tylko gdy $j''=j$ i $m''=m$.
Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle\,\langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle\,\langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2m\hbar^2.$$

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2m\hbar^2$$

Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2m\hbar^2$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1}\hbar\, \lambda_{m-1}^*\hbar - \lambda_m^*\hbar\, \lambda_m\hbar = 2m\hbar^2,$$

Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2m\hbar^2$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1}\hbar \, \lambda_{m-1}^*\hbar - \lambda_m^*\hbar \, \lambda_m\hbar = 2m\hbar^2,$$

Skąd wynika równanie różnicowe

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = 2m.$$

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle = 2m\hbar^2$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1}\hbar\, \lambda_{m-1}^*\hbar - \lambda_m^*\hbar\, \lambda_m\hbar = 2m\hbar^2,$$

Skąd wynika równanie różnicowe

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = 2m.$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j.
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j. Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.

Rzeczywiście

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 \quad =$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j.
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 \quad = \quad C - (m-1)m - [C - m(m+1)]$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j.
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j. Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = \end{aligned}$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j.
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j. Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

Oczywiście musi zachodzić

$$|\lambda_m|^2 \geqslant 0.$$

Zauważmy, że λ_m może zależeć nie tylko od m, ale również od j.
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od m, która jednak może zależeć od j.
Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

Oczywiście musi zachodzić

$$|\lambda_m|^2 \geqslant 0.$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow$

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+4C}{4}$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}, \quad \text{dla} \quad C \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}, \quad \text{dla} \quad C \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}, \qquad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}.$$

Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}, \quad \text{dla} \quad C \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}, \qquad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4C}.$$

Stany własne momentu pędu

Ponieważ gałęzie paraboli $g(m)$ są skierowane w dół, to dla $m < m_2$ i $m > m_1$ mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Ponieważ gałęzie paraboli $g(m)$ są skierowane w dół, to dla $m < m_2$ i $m > m_1$ mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1)\,\langle jm''|J_+|jm\rangle = 0, \\ (m'' - m + 1)\,\langle jm''|J_-|jm\rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości m, tzn. $m = m_1$, pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli $m'' = m_1 + 1$, a dla dolnej wartości m, tzn. $m = m_2$, drugie równanie jest spełnione dla $m'' = m_2 - 1$.

Ponieważ gałęzie paraboli $g(m)$ są skierowane w dół, to dla $m < m_2$ i $m > m_1$ mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1)\,\langle jm''|J_+|jm\rangle = 0, \\ (m'' - m + 1)\,\langle jm''|J_-|jm\rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości m, tzn. $m = m_1$, pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli $m'' = m_1 + 1$, a dla dolnej wartości m, tzn. $m = m_2$, drugie równanie jest spełnione dla $m'' = m_2 - 1$.

Odpowiednie elementy macierzowe w powyższych równaniach wiążą się ze zdefiniowanymi wcześniej współczynnikami λ_m i λ_m^*

$$\langle jm_1 + 1|J_+|jm_1\rangle = \lambda_{m_1}\hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm_2|J_-|jm_2 + 1\rangle = \lambda_{m_2}^*\hbar,$$

Ponieważ gałęzie paraboli $g(m)$ są skierowane w dół, to dla $m < m_2$ i $m > m_1$ mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.
Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1) \langle jm''|J_+|jm\rangle = 0, \\ (m'' - m + 1) \langle jm''|J_-|jm\rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości m, tzn. $m = m_1$, pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli $m'' = m_1 + 1,$ a dla dolnej wartości m, tzn. $m = m_2$, drugie równanie jest spełnione dla $m'' = m_2 - 1.$
Odpowiednie elementy macierzowe w powyższych równaniach wiążą się ze zdefiniowanymi wcześniej współczynnikami λ_m i λ_m^*

$$\langle jm_1 + 1|J_+|jm_1\rangle = \lambda_{m_1}\hbar \qquad \text{i} \qquad \langle jm_2|J_-|jm_2 + 1\rangle = \lambda_{m_2}^*\hbar,$$

a ponieważ $m = m_1$ i $m = m_2$ są miejscami zerowymi funkcji $g(m)$, $g(m_1) = |\lambda_{m_1}|^2 = |\lambda_{m_2}|^2 = 0$, to aby uniknąć ujemnych wartości kwadratu modułu, powinniśmy przyjąć

$$\langle jm_1 + 1|J_+|jm_1\rangle = 0 \qquad \text{i} \qquad \langle jm_2|J_-|jm_2 + 1\rangle = 0,$$

co gwarantuje, że największą wartością własną operatora J_3 jest $m_1\hbar$, najmniejszą wartością własną operatora J_3 jest $(m_2 + 1)\hbar$, a więc

$$m_2 + 1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Wykorzystując obliczone wartości m_1 i m_2 dostaniemy

$$m_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C} = -m_1.$$

a ponieważ $m = m_1$ i $m = m_2$ są miejscami zerowymi funkcji $g(m)$, $g(m_1) = |\lambda_{m_1}|^2 = |\lambda_{m_2}|^2 = 0$, to aby uniknąć ujemnych wartości kwadratu modułu, powinniśmy przyjąć

$$\langle jm_1 + 1|J_+|jm_1\rangle = 0 \qquad \text{i} \qquad \langle jm_2|J_-|jm_2 + 1\rangle = 0,$$

co gwarantuje, że największą wartością własną operatora J_3 jest $m_1\hbar$, najmniejszą wartością własną operatora J_3 jest $(m_2 + 1)\hbar$, a więc

$$m_2 + 1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Wykorzystując obliczone wartości m_1 i m_2 dostaniemy

$$m_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C} = -m_1.$$

Czyli m zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości m musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \ldots,$$

Czyli m zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości m musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \dots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Czyli m zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości m musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \ldots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

Dla $m = m_1$ zachodzi

$$C - m_1(m_1 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = m_1(m_1 + 1).$$

Czyli m zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leqslant m \leqslant m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości m musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \ldots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

Dla $m = m_1$ zachodzi

$$C - m_1(m_1 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = m_1(m_1 + 1).$$

Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases}$$

Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_2 = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{cases}$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\vec{J}^2 =$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\left\{ \begin{array}{l} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_2 = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{array} \right.$$

i obliczmy

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_2 = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

$$=$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+\Big) + J_3^2 \end{aligned}$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2 \\ &= \end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\left\{\begin{array}{l} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_2 = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{array}\right.$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+\Big) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2. \end{aligned}$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji $f(j)$.
Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \\ J_2 = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+\Big) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2. \end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle \quad =$$

Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+ J_- + J_- J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} =$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle = f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2$$

$$=$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle\end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\ &+ \end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle\end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+
\end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle,
\end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora $\vec{J}^2$ i wstawmy pomiędzy operatory J_+ i J_- operator jednostkowy $|j'm'\rangle\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle,
\end{aligned}$$

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\lambda_{m-1}\right|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}\left|\lambda_m\right|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2
\end{aligned}$$

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{m-1}|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}|\lambda_m|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\
&=
\end{aligned}$$

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\lambda_{m-1}\right|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}\left|\lambda_m\right|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2 + m^2\hbar^2
\end{aligned}$$

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}
\left\langle jm|\vec{J}^2|jm\right\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\
&+ \left\langle jm|J_3^2|jm\right\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{m-1}|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}|\lambda_m|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\
&= \frac{1}{2}(C-(m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C-m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2
\end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C - (m-1)m\right)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(C - m(m+1)\right)\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2\right) \\ &= \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2\\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right)\\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$,

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j)=j(j+1)$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\vec{J}^2 \left|jm\right\rangle =$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\vec{J}^2 \left|jm\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left|jm\right\rangle,
$$

Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\vec{J}^2\,|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle\,, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\vec{J}^2 \left|jm\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left|jm\right\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots
$$

$$
J_3 \left|jm\right\rangle
$$

Stany własne momentu pędu

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2 \left|jm\right\rangle &= j(j+1)\hbar^2 \left|jm\right\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \\
J_3 \left|jm\right\rangle &=
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2\left|jm\right\rangle &= j(j+1)\hbar^2\left|jm\right\rangle, \quad j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots \\ J_3\left|jm\right\rangle &= m\hbar\left|jm\right\rangle, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2\,|jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle\,, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \\
J_3\,|jm\rangle &= m\hbar\,|jm\rangle\,, \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2\,|jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle\,, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \\
J_3\,|jm\rangle &= m\hbar\,|jm\rangle\,, \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla każdej wartości j istnieje $2j+1$ różnych wartości m.

$$
\begin{aligned}
f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}\left(C-(m-1)m\right)\hbar^2+\frac{1}{2}\left(C-m(m+1)\right)\hbar^2+m^2\hbar^2 \\
&= C\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2\left(-m^2+m-m^2-m+2m^2\right) \\
&= C\hbar^2 = m_1(m_1+1)\hbar^2.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $m_1 \equiv j$, wówczas $f(j) = j(j+1)$ i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2\,|jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle\,, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \\
J_3\,|jm\rangle &= m\hbar\,|jm\rangle\,, \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla każdej wartości j istnieje $2j+1$ różnych wartości m.

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_{\pm}$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1) =$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1)$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_{\pm}$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1,

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1, wtedy

$$\lambda_m = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} = [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów $J_\pm$.

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar, \qquad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^*\hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1, wtedy

$$\lambda_m = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} = [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle \quad = \quad \lambda_m\hbar = \left[j(j+1)-m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}}\hbar$$

$$\langle jm-1|J_-|jm\rangle$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Elementy macierzowe operatorów $J_{\pm}$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &=\end{aligned}$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda_{m-1}^*\hbar =\end{aligned}$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned} \langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m \hbar = \left[j(j+1)-m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}}\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = \left[j(j+1)-m(m-1)\right]^{\frac{1}{2}}\hbar, \end{aligned}$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm 1\rangle\,.$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm 1\rangle\,.$$

Uwzględniając, że

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm1\rangle\,.$$

Uwzględniając, że $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m \hbar = \left[j(j+1)-m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1} \hbar = \left[j(j+1)-m(m-1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm \, |jm\rangle = \left[j(j+1)-m(m\pm 1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \, |jm\pm 1\rangle \, .$$

Uwzględniając, że $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ i $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned} \langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar, \end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm 1\rangle\,.$$

Uwzględniając, że $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ i $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$ oraz

$$J_3\,|jm\rangle = m\hbar\,|jm\rangle$$

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm 1\rangle\,.$$

Uwzględniając, że $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ i $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$ oraz

$$J_3\,|jm\rangle = m\hbar\,|jm\rangle$$

możemy znaleźć reprezentacje macierzowe operatorów J_1, J_2, J_3 i $\vec{J}^2$ dla poszczególnych wartości j.

Elementy macierzowe operatorów $J_\pm$ mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm+1|J_+|jm\rangle &= \lambda_m\hbar = [j(j+1)-m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar \\ \langle jm-1|J_-|jm\rangle &= \lambda^*_{m-1}\hbar = [j(j+1)-m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_\pm\,|jm\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm\pm 1\rangle\,.$$

Uwzględniając, że $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ i $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$ oraz

$$J_3\,|jm\rangle = m\hbar\,|jm\rangle$$

możemy znaleźć reprezentacje macierzowe operatorów J_1, J_2, J_3 i $\vec{J}^2$ dla poszczególnych wartości j.

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli $j = \frac{1}{2}$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 \; = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$=$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle \right.$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ & \end{pmatrix}$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \end{pmatrix}$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \Bigg($$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \Bigg(\ 1$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{matrix} \right.$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego operatora J_3 i z ortogonalności stanów własnych momentu pędu $|jm\rangle$.

Jeżeli $j = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).
Jeżeli $j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i macierz reprezentująca operator J_3 ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_3 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & -\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego operatora J_3 i z ortogonalności stanów własnych momentu pędu $|jm\rangle$.

Korzystając z relacji

$$J_+ \left| jm \right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left| jm+1 \right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$J_+ = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \,|jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$J_+ \;=\; \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix}$$

$$=$$

Korzystając z relacji

$$J_{+}\left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_{+}

$$J_{+} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_{+} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_{+} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_{+} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_{+} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \left(\quad \right)$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,\left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$J_+ = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \left(\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right.$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Korzystając z relacji

$$J_+ \left| jm \right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left| jm+1 \right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Korzystając z relacji

$$J_+ \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \,|jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\, \hbar \,|jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\, \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \Bigg(\end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\, \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned}
J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \left(\begin{matrix} 0 \end{matrix} \right.
\end{aligned}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Korzystając z relacji

$$J_+ \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned}
J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\, \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right. \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|J_+\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|J_+\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|J_+\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|J_+\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left| jm \right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left| jm+1 \right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ \left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m+1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm+1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_+

$$\begin{aligned}
J_+ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| J_+ \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_{-}\;|jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_{-}

$$J_{-} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix}$$

$$=$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \Bigg($$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- \; = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \left(\quad \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right.$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \left(\begin{matrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ & \end{matrix} \right.$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- \; = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- \; = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \left|jm\right\rangle = \left[j(j+1) - m(m-1)\right]^{\frac{1}{2}} \hbar \left|jm-1\right\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|J_-\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|J_-\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|J_-\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|J_-\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \\ \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \ |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \Big(\end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \Big(\; 0$$

a korzystając z relacji

$$J_- \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned}
J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \left(\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \right.
\end{aligned}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$J_- = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right. \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \, |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- \; |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \, \hbar \, |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_-

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_{-}\;|jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\,\hbar\,|jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator J_{-}

$$\begin{aligned}
J_{-} &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_{-}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \\ \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle & \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) =$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

J_2

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
J_2 =
$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
J_2 &= -\frac{i}{2}\left(J_+ - J_-\right) =
\end{aligned}
$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów J_1 i J_2.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$,

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

są macierzami Pauliego.

Podsumujmy wyniki dla $j = \frac{1}{2}$.

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

są macierzami Pauliego.

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\vec{J}^2 =$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\vec{J}^2 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\vec{J}^2 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$=$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\vec{J}^2 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|\vec{J}^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}|\vec{J}^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\vec{J}^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\vec{J}^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu $\vec{J}^2\,|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle$ i z ortogonalności stanów własnych $|jm\rangle$.

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu $\vec{J}^2 \, |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 \, |jm\rangle$ i z ortogonalności stanów własnych $|jm\rangle$.

Zadanie. Znaleźć postać macierzy reprezentujących operatory J_i, $i = 1, 2, 3$ i $\vec{J}^2$ dla $j = 1$ i $j = \frac{3}{2}$.

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora $\vec{J}^2$.

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu $\vec{J}^2 \, |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 \, |jm\rangle$ i z ortogonalności stanów własnych $|jm\rangle$.

Zadanie. Znaleźć postać macierzy reprezentujących operatory J_i, $i = 1, 2, 3$ i $\vec{J}^2$ dla $j = 1$ i $j = \frac{3}{2}$.

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \qquad [J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \qquad [J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ spełnia dokładnie takie same związki

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \qquad [J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ spełnia dokładnie takie same związki

$$L_i^\dagger = L_i, \qquad [L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k.$$

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \qquad [J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ spełnia dokładnie takie same związki

$$L_i^\dagger = L_i, \qquad [L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k.$$

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów $\vec{L}^{\,2}$ i L_3 są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{L}^{\,2} Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)\,,\\ L_3 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)\,,\end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$, a $-l \leqslant m \leqslant l$.

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów $\vec{L}^{\,2}$ i L_3 są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}
\vec{L}^{\,2} Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \\
L_3 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)\,,
\end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$, a $-l \leqslant m \leqslant l$.
Stosując notację Diraca możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\vec{L}^{\,2} \left| lm \right\rangle &= l(l+1)\hbar^2 \left| lm \right\rangle\,, \\
L_3 \left| lm \right\rangle &= m\hbar \left| lm \right\rangle\,.
\end{aligned}$$

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów $\vec{L}^{\,2}$ i L_3 są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{L}^{\,2} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi),\\ L_3 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi),\end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$, a $-l \leqslant m \leqslant l$.
Stosując notację Diraca możemy zapisać

$$\begin{aligned}\vec{L}^{\,2} \left|lm\right\rangle &= l(l+1)\hbar^2 \left|lm\right\rangle,\\ L_3 \left|lm\right\rangle &= m\hbar \left|lm\right\rangle.\end{aligned}$$

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu,

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k$$

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.
Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin $\frac{1}{2}$,

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.
Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin $\frac{1}{2}$, foton i bozony elektrosłabe Z^0 i $W^\pm$ mają spin 1,

Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin $\frac{1}{2}$, foton i bozony elektrosłabe Z^0 i $W^\pm$ mają spin 1, a mezony π i bozon Higgsa – spin 0.

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach $\hbar$) nieujemne, natomiast spinowy moment pędu, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.
Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin $\frac{1}{2}$, foton i bozony elektrosłabe Z^0 i $W^\pm$ mają spin 1, a mezony π i bozon Higgsa – spin 0.

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie $\frac{1}{2}$ mają ciekawą własność. Mianowicie, nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt 2π, ale dopiero przy obrocie o kąt 4π.

Stany kwantowe o spinie połówkowym

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie $\frac{1}{2}$ mają ciekawą własność. Mianowicie, nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt 2π, ale dopiero przy obrocie o kąt 4π.

Rozważmy np. obrót o kąt 2π względem osi Oz, dla którego unitarny operator obrotu ma postać

Stany kwantowe o spinie połówkowym

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie $\frac{1}{2}$ mają ciekawą własność. Mianowicie, nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt 2π, ale dopiero przy obrocie o kąt 4π.

Rozważmy np. obrót o kąt 2π względem osi Oz, dla którego unitarny operator obrotu ma postać

$$U_R(2\pi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\, 2\pi\, J_z},$$

Stany kwantowe o spinie połówkowym

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie $\frac{1}{2}$ mają ciekawą własność. Mianowicie, nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt 2π, ale dopiero przy obrocie o kąt 4π.
Rozważmy np. obrót o kąt 2π względem osi Oz, dla którego unitarny operator obrotu ma postać

$$U_R(2\pi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,J_z},$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \quad =$$

Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle =$$

Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$=$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$\begin{aligned} U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$\begin{aligned}
U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,J_z}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&=
\end{aligned}$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$\begin{aligned} U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,J_z}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \left(\cos(\mp\pi)+i\sin(\mp\pi)\right)\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$
\begin{aligned}
U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\,J_z}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \left(\cos(\mp\pi) + i\sin(\mp\pi)\right)\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$
\begin{aligned}
U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\, J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= (\cos(\mp\pi) + i\sin(\mp\pi))\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= -\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$\begin{aligned} U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \left(\cos(\mp\pi) + i\sin(\mp\pi)\right)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= -\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Dopiero przy obrocie o kąt 4π mielibyśmy

$$U_R(4\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle.$$

a jego działanie na stan $\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ daje

$$
\begin{aligned}
U_R(2\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi J_z}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= e^{\mp i\pi}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \left(\cos(\mp\pi) + i\sin(\mp\pi)\right)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= -\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Dopiero przy obrocie o kąt 4π mielibyśmy

$$
U_R(4\pi)\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle .
$$

Oczywiście stany kwantowe dla spinu całkowitego, dla którego wartości własne operatora S_3 są całkowitymi wielokrotnościami $\hbar$, przy obrocie o kąt 2π przejdą w siebie.

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych częścu układu, np.
orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie,

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych częścu układu, np. orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie, albo orbitalnego i spinowego momentu pędu tego samego elektronu.

Składanie operatorów momentu pędu

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych częścu układu, np. orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie, albo orbitalnego i spinowego momentu pędu tego samego elektronu.

Rozważmy dwa operatory momentu pędu $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$, które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.

W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \qquad i,j = 1,2,3$$

Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$, które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.
W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \qquad i,j = 1,2,3$$

oraz

$$\left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)}, \qquad \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)}.$$

Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$, które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.
W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$\left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)}, \qquad \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)}.$$

Każdy z operatorów jest oczywiście hermitowski

$$J_i^{(1)\,\dagger} = J_i^{(1)} \quad \mathrm{i} \quad J_i^{(2)\,\dagger} = J_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Rozważmy dwa operatory momentu pędu $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$, które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.
W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$\left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)}, \qquad \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)}.$$

Każdy z operatorów jest oczywiście hermitowski

$$J_i^{(1)\,\dagger} = J_i^{(1)} \quad \mathrm{i} \quad J_i^{(2)\,\dagger} = J_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$,

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle = j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle \;=\; j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle$$

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle\\ J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &=\end{aligned}$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle
\end{aligned}
$$

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &
\end{aligned}
$$

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &=
\end{aligned}$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle
\end{aligned}$$

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &
\end{aligned}$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned} \vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\ J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\ \vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\ J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= \end{aligned}$$

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\hbar\,|j_2 m_2\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\hbar\,|j_2 m_2\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zakładamy, że operator $\vec{J}^{(1)}$ nie działa na stany $|j_2 m_2\rangle$,

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\hbar\,|j_2 m_2\rangle\,.
\end{aligned}$$

Zakładamy, że operator $\vec{J}^{(1)}$ nie działa na stany $|j_2 m_2\rangle$, a operator $\vec{J}^{(2)}$ nie działa na stany $|j_1 m_1\rangle$,

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\hbar\,|j_2 m_2\rangle\,.
\end{aligned}$$

Zakładamy, że operator $\vec{J}^{(1)}$ nie działa na stany $|j_2 m_2\rangle$, a operator $\vec{J}^{(2)}$ nie działa na stany $|j_1 m_1\rangle$, gdyż te stany rozpinają różne przestrzenie Hilberta.

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów $\vec{J}^{(1)\,2}$ i $J_3^{(1)}$ przez $|j_1 m_1\rangle$ a stany własne operatorów $\vec{J}^{(2)\,2}$ i $J_3^{(2)}$ przez $|j_2 m_2\rangle$, tzn.

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{(1)\,2}\,|j_1 m_1\rangle &= j_1\,(j_1+1)\,\hbar^2\,|j_1 m_1\rangle \\
J_3^{(1)}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\hbar\,|j_1 m_1\rangle \\
\vec{J}^{(2)\,2}\,|j_2 m_2\rangle &= j_2\,(j_2+1)\,\hbar^2\,|j_2 m_2\rangle \\
J_3^{(2)}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\hbar\,|j_2 m_2\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zakładamy, że operator $\vec{J}^{(1)}$ nie działa na stany $|j_2 m_2\rangle$, a operator $\vec{J}^{(2)}$ nie działa na stany $|j_1 m_1\rangle$, gdyż te stany rozpinają różne przestrzenie Hilberta.

Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] \quad =$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] = \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right]$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] = \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right]$$

$$=$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right] \\ &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \end{aligned}$$

Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right] \\
&= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\
&=
\end{aligned}$$

Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right] \\ &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right], \end{aligned}$$

Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right] \\
&= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\
&= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right],
\end{aligned}$$

gdyż składowe operatorów $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$ komutują.

Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}\right] \\ &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right], \end{aligned}$$

gdyż składowe operatorów $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{J}^{(2)}$ komutują.

W takim razie

$$[J_i, J_j] = \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right]$$

$$=$$

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)}\end{aligned}$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(J_k^{(1)} + J_k^{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

Całkowity moment pędu

W takim razie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(J_k^{(1)} + J_k^{(2)}\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Całkowity moment pędu

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(J_k^{(1)} + J_k^{(2)}\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.\end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Całkowity moment pędu

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(J_k^{(1)} + J_k^{(2)}\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.\end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Jest to oczywiście operator hermitowski, tak jak jego składowe.

Całkowity moment pędu

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] + \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(J_k^{(1)} + J_k^{(2)}\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.\end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Jest to oczywiście operator hermitowski, tak jak jego składowe.

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \,.$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \, .$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3

$$\vec{J}^2 \, |jm\rangle \quad = \quad j\,(j+1)\,\hbar^2 \, |jm\rangle$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \, .$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów $\vec{J}^{\,2}$ i J_3

$$\begin{aligned} \vec{J}^{\,2} \, |jm\rangle &= j\,(j+1)\,\hbar^2 \, |jm\rangle \\ J_3 \, |jm\rangle & \end{aligned}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \, .$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów $\vec{J}^{\,2}$ i J_3

$$\begin{aligned} \vec{J}^{\,2}\, |jm\rangle &= j\,(j+1)\,\hbar^2\, |jm\rangle \\ J_3\, |jm\rangle &= \end{aligned}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle .$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ i J_3

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle . \end{aligned}$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe $|j_1 m_1\rangle$ i $|j_2 m_2\rangle$.

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \,.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów $\vec{J}^{\,2}$ i J_3

$$\begin{aligned} \vec{J}^{\,2}\,|jm\rangle &= j\,(j+1)\,\hbar^2\,|jm\rangle \\ J_3\,|jm\rangle &= m\hbar\,|jm\rangle \,. \end{aligned}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych j_1 i j_2, która ma wymiar $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy $|m_1 m_2\rangle$.

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych j_1 i j_2, która ma wymiar $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.
Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy $|m_1 m_2\rangle$.
Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \,,$$

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych j_1 i j_2, która ma wymiar $(2j_1+1)(2j_2+1)$.
Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy $|m_1 m_2\rangle$.
Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \,,$$

gdzie zastosowaliśmy konwencję sumacyjną

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| = \mathbb{I}.$$

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych j_1 i j_2, która ma wymiar $(2j_1+1)(2j_2+1)$.
Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy $|m_1 m_2\rangle$.
Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle\,,$$

gdzie zastosowaliśmy konwencję sumacyjną

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| = \mathbb{I}.$$

Obliczmy

$$J_3 \, |jm\rangle = J_3 \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$
$$=$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\ &= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \, |jm\rangle &= J_3 \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2|jm\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \left|jm\right\rangle &= J_3 \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)} \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \, |jm\rangle &= J_3 \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(m_1 \hbar \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle
\end{aligned}
$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 \left|jm\right\rangle &= J_3 \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\ &= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\ &= \left(J_3^{(1)} \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)} \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\ &= \left(m_1\hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes m_2\hbar \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \, |jm\rangle &= J_3 \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= (m_1 \hbar \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar \, |m_2\rangle) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2) \, \hbar \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
J_3 \left|jm\right\rangle &= J_3 \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)} \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1\hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes m_2\hbar \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= (m_1 + m_2)\,\hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&=
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \left|jm\right\rangle &= J_3 \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)} \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1\hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes m_2\hbar \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right)\hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right)\hbar \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \, |jm\rangle &= J_3 \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= \left(m_1 \hbar \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar \, |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2) \, \hbar \, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2) \, \hbar \, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3 \left|jm\right\rangle &= J_3 \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)} \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 \hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes m_2 \hbar \left|m_2\right\rangle\right) \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right) \hbar \left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right) \hbar \left|m_1 m_2\right\rangle \left\langle m_1 m_2 | jm\right\rangle \\
&= m\hbar \left|jm\right\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3\,|jm\rangle &= J_3\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right)|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)}\,|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)}\,|m_2\rangle\right)\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(m_1\hbar\,|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2\hbar\,|m_2\rangle\right)\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= m\hbar\,|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
J_3\left|jm\right\rangle &= J_3\left|m_1 m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right)\left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)}\left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes J_3^{(2)}\left|m_2\right\rangle\right)\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= \left(m_1\hbar\left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle + \left|m_1\right\rangle \otimes m_2\hbar\left|m_2\right\rangle\right)\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right)\hbar\left|m_1\right\rangle \otimes \left|m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= \left(m_1 + m_2\right)\hbar\left|m_1 m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle \\
&= m\hbar\left|jm\right\rangle = m\hbar\left|m_1 m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy związek

$$
\left(m_1 + m_2\right)\hbar\left|m_1 m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle = m\hbar\left|m_1 m_2\right\rangle\left\langle m_1 m_2|jm\right\rangle .
$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= \left(J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle\right) \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= (m_1\hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2\hbar |m_2\rangle) \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2)\,\hbar\, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= (m_1 + m_2)\,\hbar\, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle \\
&= m\hbar |jm\rangle = m\hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle .
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle .$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle \quad = \quad m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,,$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,,\\ (m_1 + m_2 - m)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle & \end{aligned}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,,\\ (m_1 + m_2 - m)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= \end{aligned}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\, |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,, \\ (m_1 + m_2 - m)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,,\\ (m_1 + m_2 - m)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

który pociąga $\langle m_1 m_2|jm\rangle = 0$, albo

$$m = m_1 + m_2.$$

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach $|m_1 m_2\rangle$ w równaniu

$$(m_1 + m_2)\,\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle = m\hbar\,|m_1 m_2\rangle\,\langle m_1 m_2|jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= m\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle\,,\\ (m_1 + m_2 - m)\,\hbar\,\langle m_1 m_2|jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

który pociąga $\langle m_1 m_2|jm\rangle = 0$, albo

$$m = m_1 + m_2.$$

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.
Weźmy wartość m o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.
Weźmy wartość m o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc

Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.
Weźmy wartość m o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2 - 1$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.
Weźmy wartość m o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2 - 1$ lub $m_1 = j_1 - 1$ i $m_2 = j_2$.

Ponieważ $-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$ a $-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$, to

$$-j_1 - j_2 \leqslant m \leqslant j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość m wynosi $j_1 + j_2$.
Wartość ta pojawia się tylko raz dla $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2$.
Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu j wynosi $j = j_1 + j_2$.
Weźmy wartość m o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc $m_1 = j_1$ i $m_2 = j_2 - 1$ lub $m_1 = j_1 - 1$ i $m_2 = j_2$.

Stany własne całkowitego momentu pędu

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm(j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2 - 1$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm (j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2 - 1$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Takie postępowanie możemy kontynuować.

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm (j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o $j = j_1 + j_2 - 1$, do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Takie postępowanie możemy kontynuować.

Stany własne całkowitego momentu pędu

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji $|jm\rangle$ i $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$ musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych j, m i m_1, m_2 odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji $|jm\rangle$ i $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$ musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych j, m i m_1, m_2 odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.

Wykonując wewnętrzną sumę po lewej stronie i obie sumy po prawej otrzymamy

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji $|jm\rangle$ i $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$ musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych j, m i m_1, m_2 odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.
Wykonując wewnętrzną sumę po lewej stronie i obie sumy po prawej otrzymamy

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min}+1+2(j_1+j_2)+1}{2}\,(j_1+j_2-j_{\min}+1)=(2j_1+1)(2j_2+1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1+j_2+1+j_{\min})(j_1+j_2+1-j_{\min})=(2j_1+1)(2j_2+1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1+j_2+1)^2-j_{\min}^2=(2j_1+1)(2j_2+1),$$

a więc

$$j_{\min}^2=(j_1+j_2+1)^2-(2j_1+1)(2j_2+1).$$

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2}\,(j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

a więc

$$j_{\min}^2 = (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy równanie

$$j_{\min}^2 = (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$
$$=$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned} j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned} j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= \end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$
\begin{aligned}
j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\
&= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\
&= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2 = (j_1 - j_2)^2.
\end{aligned}
$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned} j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2 = (j_1 - j_2)^2. \end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm\sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm\left|j_1 - j_2\right|.$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned} j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2 = (j_1 - j_2)^2. \end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm\sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm\left|j_1 - j_2\right|.$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę fakt, że wartości własne całkowitego momentu pędu są nieujemne, otrzymujemy wynik

$$j_{\min} = \left|j_1 - j_2\right|.$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned} j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1 j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1 j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2 = (j_1 - j_2)^2. \end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm\sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm \left| j_1 - j_2 \right|.$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę fakt, że wartości własne całkowitego momentu pędu są nieujemne, otrzymujemy wynik

$$j_{\min} = \left| j_1 - j_2 \right|.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant \; j \; \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.

Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant \; j \; \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.

Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1$$

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant \; j \; \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość $j = j_1 + j_2$.
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leqslant \; j \; \leqslant j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.
Przykładowo, w jonie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący $s = \frac{1}{2}$, musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.
W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 0, 1.$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 0, 1.$$

W stanie z $l = 0$ otrzymamy tak jak poprzednio

$$j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 0, 1.$$

W stanie z $l = 0$ otrzymamy tak jak poprzednio

$$j = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

$$j = \frac{3}{2}$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

$$j = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$
$$j = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$\begin{aligned} j = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \\ j = \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Czyli na pierwszym poziomie wzbudzonym, odpowiadającym $n = 2$, elektron może występować w 8 różnych stanach kwantowych.

Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z $l = 1$ dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu j

$$j = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$\begin{aligned} j = \frac{1}{2} \quad & \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \\ j = \frac{3}{2} \quad & \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Czyli na pierwszym poziomie wzbudzonym, odpowiadającym $n = 2$, elektron może występować w 8 różnych stanach kwantowych.

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozważmy równanie (przy ustalonym j_1 i j_2)

$$|jm\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$=$$

Rozważmy równanie (przy ustalonym j_1 i j_2)

$$
\begin{aligned}
|jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\
&\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Rozważmy równanie (przy ustalonym j_1 i j_2)

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\ &\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \,. \end{aligned}$$

Współczynniki rozwinięcia

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

stanów $|jm\rangle$ na stany $|m_1 m_2\rangle$ noszą nazwę współczynników Clebscha-Gordana.

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozważmy równanie (przy ustalonym j_1 i j_2)

$$
\begin{aligned}
|jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\
&\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle .
\end{aligned}
$$

Współczynniki rozwinięcia

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

stanów $|jm\rangle$ na stany $|m_1 m_2\rangle$ noszą nazwę współczynników Clebscha-Gordana.

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$|m_1 m_2\rangle = \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle$$

$$=$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$
\begin{aligned}
|m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\
&\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$
\begin{aligned}
|m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\
&\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$
\langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle = \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'},
$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$
\begin{aligned}
|m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\
&\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$
\langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle = \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'},
$$

$$
\langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle
$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle &= \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}, \\ \langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle &= \end{aligned}$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$
\begin{aligned}
|m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\
&\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$
\begin{aligned}
\langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle &= \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}, \\
\langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle &= \langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},
\end{aligned}
$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$|m_1 m_2\rangle = \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle$$
$$\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,.$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle = \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'},$$
$$\langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle = \langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$\langle jm|m_1 m_2\rangle = \langle jm|m_1 m_2\rangle^*$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$
\begin{aligned}
|m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\
&\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$
\begin{aligned}
\langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle &= \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}, \\
\langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle &= \langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},
\end{aligned}
$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$
\langle jm|m_1 m_2\rangle = \langle jm|m_1 m_2\rangle^* = \langle m_1 m_2|jm\rangle \,.
$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \,. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2|jm\rangle \langle jm|m_1' m_2'\rangle &= \langle m_1 m_2|m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}, \\ \langle jm|m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2|j' m'\rangle &= \langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \end{aligned}$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$\langle jm|m_1 m_2\rangle = \langle jm|m_1 m_2\rangle^* = \langle m_1 m_2|jm\rangle \,.$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_{\pm}$ dla całkowitego momentu pędu.

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i\left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}\right)$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_\pm &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i\left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_\pm &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i\left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}\right) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} \end{aligned}$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$
\begin{aligned}
J_\pm &= J_1 \pm i J_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i \left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)} \right) \\
&= J_1^{(1)} \pm i J_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i J_2^{(2)} = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)} .
\end{aligned}
$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.
Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_\pm &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i\left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}\right) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)}. \end{aligned}$$

Szczegółowy opis procedury konstruowania współczynników Clebscha-Gordana można znaleźć np. w §28 podręcznika L.I. Schiffa.

Współczynniki Clebscha-Gordana

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów $J_\pm$ dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_\pm &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i\left(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}\right) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)}. \end{aligned}$$

Szczegółowy opis procedury konstruowania współczynników Clebscha-Gordana można znaleźć np. w §28 podręcznika L.I. Schiffa.