Symetrie w mechanice kwantowej

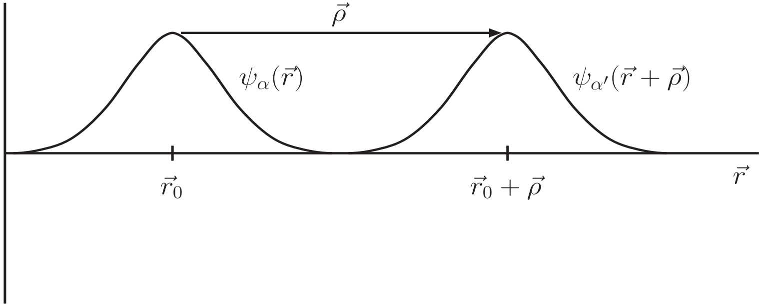
Wykład 14

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

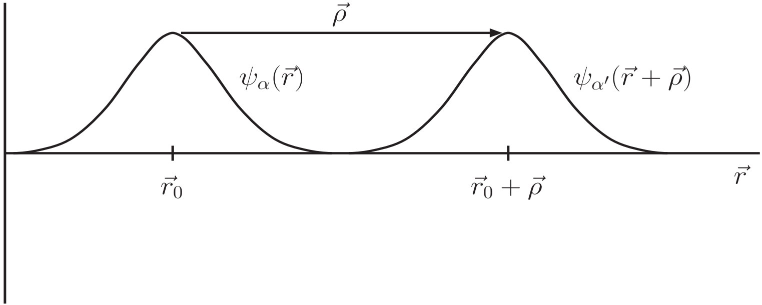
Będziemy pracować w obrazie Schrödingera, dlatego opuszczamy indeks S.

Rozważmy translację przestrzenną układu fizycznego o ustalony wektor $\vec{\rho}$.



Będziemy pracować w obrazie Schrödingera, dlatego opuszczamy indeks S.

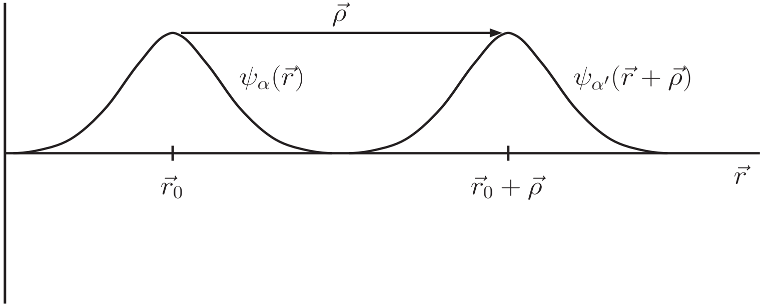
Rozważmy translację przestrzenną układu fizycznego o ustalony wektor $\vec{\rho}$.



Przed transformacją nasz układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$,

Będziemy pracować w obrazie Schrödingera, dlatego opuszczamy indeks S.

Rozważmy translację przestrzenną układu fizycznego o ustalony wektor $\vec{\rho}$.



Przed transformacją nasz układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$,

gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.

Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r} + \vec{\rho})$,

Translacja przestrzenna

gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.

Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r} + \vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do opisu układu fizycznego oznaczyliśmy przez α'.

gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.
Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do opisu układu fizycznego oznaczyliśmy przez α'.
Jest oczywiste, że przy translacji zachodzi związek

$$\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}).$$

gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.
Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do opisu układu fizycznego oznaczyliśmy przez α'.
Jest oczywiste, że przy translacji zachodzi związek

$$\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}).$$

W przestrzeni Hilberta stanów fizycznych $\mathcal{H}$ translacja przestrzenna jest reprezentowana przez unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_{\alpha}(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}-\vec{\rho}).$$

gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.
Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do opisu układu fizycznego oznaczyliśmy przez α'.
Jest oczywiste, że przy translacji zachodzi związek

$$\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}).$$

W przestrzeni Hilberta stanów fizycznych $\mathcal{H}$ translacja przestrzenna jest reprezentowana przez unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_{\alpha}(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}-\vec{\rho}).$$

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad \psi_\alpha(x - \rho, y, z) =$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)$$

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)$$

$$+$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&=
\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z)
\end{aligned}
$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&=
\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&= e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x, y, z).
\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg funkcję $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$.

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&= e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x, y, z).
\end{aligned}$$

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) =$$

Translacja przestrzenna

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho_x \frac{\partial}{\partial x}} e^{-\rho_y \frac{\partial}{\partial y}} e^{-\rho_z \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Translacja przestrzenna

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho_x \frac{\partial}{\partial x}} e^{-\rho_y \frac{\partial}{\partial y}} e^{-\rho_z \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x, y, z)$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x, y, z)$$
$$=$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = \end{aligned}$$

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \Rightarrow$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0.$
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x}+\rho_y \frac{\partial}{\partial y}+\rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)}\psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}\psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{p}.$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{p}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}).$$

Widzimy, że unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$ ma postać

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}.$$

Translacja przestrzenna

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Widzimy, że unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$ ma postać

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}.$$

Translacja przestrzenna

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej.

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji

Translacja przestrzenna

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej.

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji

Translacja przestrzenna

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej.

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji

$$|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej.
Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji

$$|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Translacja przestrzenna

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym.
Obliczmy

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} =$$

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym.
Obliczmy

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}},$$

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, \quad \text{bo} \quad \vec{p}^{\dagger} = \vec{p},$$

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, \quad \text{bo} \quad \vec{p}^{\dagger} = \vec{p},$$

a więc

$$U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} =$$

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, \quad \text{bo} \quad \vec{p}^{\dagger} = \vec{p},$$

a więc

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} = 1,$$

Translacja przestrzenna

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, \quad \text{bo} \quad \vec{p}^{\dagger} = \vec{p},$$

a więc

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że składowe operatora pędu komutują, $[p_i, p_j] = 0$.

Operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, \quad \text{bo} \quad \vec{p}^{\dagger} = \vec{p},$$

a więc

$$U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że składowe operatora pędu komutują, $[p_i, p_j] = 0$.

Stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ nie musi spełniać równania Schrödingera, nawet jeśli stan wyjściowy $|\alpha(t)\rangle$ je spełniał.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\right) = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\ &= U_{\vec{r}}(\vec{\rho})H\,|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = H\,|\alpha(t)\rangle$$

i ze związku
$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = |\alpha'(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle$
$\Rightarrow \quad |\alpha(t)\rangle = U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,.$

Stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ nie musi spełniać równania Schrödingera, nawet jeśli stan wyjściowy $|\alpha(t)\rangle$ je spełniał.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_{\vec{r}}(\vec{\rho})|\alpha(t)\rangle\right) = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_{\vec{r}}(\vec{\rho})H|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})|\alpha'(t)\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$$

i ze związku
$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})|\alpha(t)\rangle = |\alpha'(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho})|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})|\alpha'(t)\rangle$
$\Rightarrow \quad |\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})|\alpha'(t)\rangle\,.$

Translacja przestrzenna

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})|\alpha'(t)\rangle.$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle = H|\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})|\alpha'(t)\rangle .$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle = H|\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H.$$

Translacja przestrzenna

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,.$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle = H\,|\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow$$

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Przypomnijmy, że $[\vec{p}, H] = 0$ jest warunkiem koniecznym na to, aby pęd był stałą ruchu.

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Przypomnijmy, że $[\vec{p}, H] = 0$ jest warunkiem koniecznym na to, aby pęd był stałą ruchu.

Translacja przestrzenna

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.

Translacja przestrzenna

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.

Translacja przestrzenna

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.
Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii,

Translacja przestrzenna

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.
Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii, tzn.

$$H\,|\alpha\rangle = E_\alpha\,|\alpha\rangle$$

i $[\vec{p}, H] = 0$, to stan $\vec{p}\,|\alpha\rangle$ będzie również stanem własnym operatora H do tej samej wartości własnej E_α,

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.
Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii, tzn.

$$H\,|\alpha\rangle = E_\alpha\,|\alpha\rangle$$

i $[\vec{p}, H] = 0$, to stan $\vec{p}\,|\alpha\rangle$ będzie również stanem własnym operatora H do tej samej wartości własnej E_α, z czym na ogół wiąże się degeneracja wartości własnych energii,

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Jest to wynik analogiczny do otrzymanego wcześniej w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.
Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii, tzn.

$$H\,|\alpha\rangle = E_\alpha\,|\alpha\rangle$$

i $[\vec{p}, H] = 0$, to stan $\vec{p}\,|\alpha\rangle$ będzie również stanem własnym operatora H do tej samej wartości własnej E_α, z czym na ogół wiąże się degeneracja wartości własnych energii, a więc symetria układu fizycznego prowadzi na ogół do degeneracji jego dozwolonych poziomów energetycznych.

W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.

a więc symetria układu fizycznego prowadzi na ogół do degeneracji jego dozwolonych poziomów energetycznych.
W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.

Symetria w sensie kwantowym

Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 .$$

Symetria w sensie kwantowym

Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 .$$

To samo możemy sformułować w wersji *pozadiagonalnej*, tzn. dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia od stanu kwantowego $|\psi\rangle$ do stanu kwantowego $|\phi\rangle$

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 .$$

Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 \,.$$

To samo możemy sformułować w wersji *pozadiagonalnej*, tzn. dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia od stanu kwantowego $|\psi\rangle$ do stanu kwantowego $|\phi\rangle$

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \,.$$

Symetria w sensie kwantowym

Równanie

$$\left|\langle \phi' | \psi' \rangle\right|^2 = \left|\langle \phi | \psi \rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$

Równanie

$$|\langle \phi' | \psi' \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$
2. $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle.$

Symetria w sensie kwantowym

Równanie

$$\left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

Równanie

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

a w drugim

$$|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle A\psi| = \langle\psi|\,A^\dagger.$$

Równanie

$$\left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

a w drugim

$$|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle A\psi| = \langle\psi|\,A^\dagger.$$

Symetria w sensie kwantowym

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U \left|\psi_2\right\rangle,$$

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U\left|\psi_2\right\rangle,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A\left|\psi_2\right\rangle,$$

dla liczb zespolonych α_1, α_2.

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U \left|\psi_2\right\rangle,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A \left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A \left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A \left|\psi_2\right\rangle,$$

dla liczb zespolonych α_1, α_2.
Operator A nazywamy operatorem antyunitarnym.

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U\left|\psi_2\right\rangle,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A\left|\psi_2\right\rangle,$$

dla liczb zespolonych α_1, α_2.
Operator A nazywamy operatorem antyunitarnym.

Symetria w sensie kwantowym

Uogólnijmy związek $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle \phi' | O' | \psi' \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \, .$$

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle \,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle\phi'| = \langle\phi|\,U^\dagger$$

Uogólnijmy związek $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle \phi' | O' | \psi' \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle \phi'| = \langle \phi|\, U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle \phi |\, U^\dagger O' U |\, \psi \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \,,$$

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle \,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle\phi'| = \langle\phi|\,U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle\phi|\,U^\dagger O' U|\,\psi\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle \,,$$

co można rozpatrywać jako działanie operatora unitarnego na operator

$$U^\dagger O' U = O \qquad \Rightarrow \qquad O' = UOU^\dagger .$$

Symetria w sensie kwantowym

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle\,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle\phi'| = \langle\phi|\,U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle\phi|\,U^\dagger O' U|\,\psi\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle\,,$$

co można rozpatrywać jako działanie operatora unitarnego na operator

$$U^\dagger O' U = O \qquad \Rightarrow \qquad O' = UOU^\dagger.$$

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_{\varepsilon} = 1 - i\varepsilon G.$$

Generatory infinitezymalne

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji.

Generatory infinitezymalne

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji.
Operator odwrotny do U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G,$$

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji. Operator odwrotny do U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G,$$

Generatory infinitezymalne

gdyż

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\
&=
\end{aligned}
$$

gdyż

$$\begin{aligned} U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\ &= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1, \end{aligned}$$

gdyż

$$\begin{aligned} U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\ &= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1, \end{aligned}$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.

gdyż

$$U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} = (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) = 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1,$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.

Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

Generatory infinitezymalne

gdyż

$$U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} = (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) = 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1,$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.
Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

a więc

$$U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.$$

gdyż

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\
&= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1,
\end{aligned}
$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.
Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$
U_\varepsilon^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,
$$

a więc

$$
U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.
$$

Zatem operator U_ε jest unitarny tylko jeśli operator G jest hermitowski.

gdyż

$$U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} = (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G)$$
$$= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1,$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.
Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

a więc

$$U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.$$

Zatem operator U_ε jest unitarny tylko jeśli operator G jest hermitowski.

Generatory infinitezymalne

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$O' = UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G)$$

Generatory infinitezymalne

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$O' \;=\; UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG)$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= \end{aligned}$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Generatory infinitezymalne

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator O jest symetryczny, tzn. $O' = O$, względem rozpatrywanej transformacji unitarnej, jeśli

$$[G, O] = 0.$$

Generatory infinitezymalne

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator O jest symetryczny, tzn. $O' = O$, względem rozpatrywanej transformacji unitarnej, jeśli

$$[G, O] = 0.$$

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G}$$

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad =$$

Generatory infinitezymalne

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad = \quad O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G, [G, O]]$$

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad = \quad O - i\lambda[G,O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]]$$

$$+$$

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} &= O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G, [G, O]] \\ &+ \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G, [G, [G, O]]] + \ldots . \end{aligned}$$

Generatory infinitezymalne

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} &= O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]] \\ &+ \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,O]]] + \ldots . \end{aligned}$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ.

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} &= O - i\lambda[G,O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]] \\ &+ \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,O]]] + \dots . \end{aligned}$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ. Tu też widzimy, że
$O' = O \quad \Leftrightarrow \quad [G,O] = 0.$

Generatory infinitezymalne

Dla skończonego parametru λ możemy dokonać eksponencjacji otrzymując

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} = O - i\lambda[G,O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]] + \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,O]]] + \ldots .$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ. Tu też widzimy, że $O' = O \quad \Leftrightarrow \quad [G,O] = 0.$

Przesunięcie w czasie

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle \,.$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle \,.$$

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle \, .$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle \, .$$

Łącząc to równanie z pierwszym dla $t - \tau$ otrzymamy

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle \, .$$

Przesunięcie w czasie

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle \, .$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau)\, |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle \, .$$

Łącząc to równanie z pierwszym dla $t - \tau$ otrzymamy

$$U_t(\tau)\, |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle \, .$$

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$\begin{aligned} |\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle(-\tau) \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|\alpha(t)\rangle(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}|\alpha(t)\rangle\,. \end{aligned}$$

Przesunięcie w czasie

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

Przesunięcie w czasie

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$|\alpha(t-\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

otrzymujemy następującą postać operatora ewolucji czasowej

$$U_t(\tau) = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$\begin{aligned} |\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau) \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle\,. \end{aligned}$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

otrzymujemy następującą postać operatora ewolucji czasowej

$$U_t(\tau) = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H|\alpha(t)\rangle .$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = H\,|\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = H\left|\alpha(t)\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar\frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) =$$

Przesunięcie w czasie

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\left|\alpha(t)\right\rangle.$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\left|\alpha(t)\right\rangle .$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle =$$

Przesunięcie w czasie

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle = e^{\tau\frac{i}{\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle$$

Przesunięcie w czasie

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} |\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H |\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2} H^2 |\alpha(t)\rangle .$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau) |\alpha(t)\rangle = e^{-\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} |\alpha(t)\rangle = e^{-\tau \frac{1}{i\hbar}H} |\alpha(t)\rangle = e^{\tau \frac{i}{\hbar}H} |\alpha(t)\rangle$$

i unitarny operator przesunięcia w czasie ma postać

$$U_t(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar}\tau H}.$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} |\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar} H \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2} H^2 |\alpha(t)\rangle .$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau) |\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} |\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H} |\alpha(t)\rangle = e^{\tau\frac{i}{\hbar}H} |\alpha(t)\rangle$$

i unitarny operator przesunięcia w czasie ma postać

$$U_t(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar}\tau H}.$$

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.

Jeśli operator H zależy jawnie od czasu, to dla translacji infinitezymalnej możemy zapisać

$$e^{\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)} \approx 1 + \frac{i}{\hbar}\tau\, H(t).$$

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.
Jeśli operator H zależy jawnie od czasu, to dla translacji infinitezymalnej możemy zapisać

$$e^{\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)} \approx 1 + \frac{i}{\hbar}\tau\, H(t).$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle \quad \approx \quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right]$$

$$=$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle-\tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle-\tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle-\tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\;|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&\approx
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\left(1 + \frac{i}{\hbar} \tau\, H(t) \right) |\alpha(t)\rangle \right] \\
&= i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle - \tau H(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\, |\alpha(t)\rangle - \tau\, \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar} H(t) H(t) |\alpha(t)\rangle \\
&= H(t) \left(1 + \frac{i\tau}{\hbar} H(t) \right) |\alpha(t)\rangle - \tau\, \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle \\
&\approx H(t) U_t(\tau)\, |\alpha(t)\rangle - \tau\, \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} \left(1 + \frac{i\tau}{\hbar} H(t) \right) |\alpha(t)\rangle ,
\end{aligned}
$$

gdzie po prawej stronie uwzględniliśmy część kolejnego wyrazu rozwinięcia eksponenty.

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie po prawej stronie uwzględniliśmy część kolejnego wyrazu rozwinięcia eksponenty.

Przesunięcie w czasie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle \approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle$$

$$\approx$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&= H(t)\left|\alpha'(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1 + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&= H(t)\left|\alpha'(t)\right\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&= H(t)\left|\alpha'(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.

Wynik ten jest oczywisty, gdyż na skutek ewolucji czasowej hamiltonianu, stan przesunięty w czasie znajduje się w innych warunkach niż stan wyjściowy.

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha'(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.
Wynik ten jest oczywisty, gdyż na skutek ewolucji czasowej hamiltonianu, stan przesunięty w czasie znajduje się w innych warunkach niż stan wyjściowy.

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \to \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$

Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi,

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1$.
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.
Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.
Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.
Rozważmy obrót infinitezymalny o kąty $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$, dla którego

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \; \rightarrow \; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.
Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.
Rozważmy obrót infinitezymalny o kąty $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$, dla którego

$$\vec{r} \; \rightarrow \; \vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

Obroty

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

Definiujemy unitarny operator obrotu infinitezymalnego $U_R(\vec{\phi})$:

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

Definiujemy unitarny operator obrotu infinitezymalnego $U_R(\vec{\phi})$:

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obroty

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

W takim razie

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}\right).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

W takim razie

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}\right).$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) \approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) \quad \approx \quad \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})$$

$$=$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \quad =$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r})-(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \psi_\alpha(\vec{r})-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})\end{aligned}$$

Obliczmy

$$(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} = (\vec{\phi}\times\vec{r})_i p_i =$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{\phi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i =
$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{\phi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i
$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\phi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&=
\end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\phi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \phi_j (\vec{r} \times \vec{p})_j =
\end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r})-(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \psi_\alpha(\vec{r})-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} &= (\vec{\phi}\times\vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j\varepsilon_{jki}x_k p_i\\ &= \phi_j(\vec{r}\times\vec{p})_j = \phi_j L_j =\end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\phi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \phi_j (\vec{r} \times \vec{p})_j = \phi_j L_j = \vec{\phi} \cdot \vec{L},
\end{aligned}
$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r})-(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \psi_\alpha(\vec{r})-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} &= (\vec{\phi}\times\vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j\varepsilon_{jki}x_k p_i\\ &= \phi_j(\vec{r}\times\vec{p})_j = \phi_j L_j = \vec{\phi}\cdot\vec{L},\end{aligned}$$

gdzie $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ jest operatorem orbitalnego momentu pędu.

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} &= (\vec{\phi}\times\vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\phi_j x_k p_i = \phi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\ &= \phi_j(\vec{r}\times\vec{p})_j = \phi_j L_j = \vec{\phi}\cdot\vec{L},\end{aligned}$$

gdzie $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ jest operatorem orbitalnego momentu pędu.

Zatem

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) \quad = \quad \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})$$

$$=$$

Zatem

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})$$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi} \cdot \vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),$$

Zatem

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}), \end{aligned}$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})$$

Zatem

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}), \end{aligned}$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$,

Zatem

$$U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})$$
$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, prawo transformacyjne przy obrotach jest inne

$$\vec{\psi}_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),
\end{aligned}
$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$
U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})
$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, prawo transformacyjne przy obrotach jest inne

$$
\vec{\psi}_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad =$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad = \quad R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad = \quad R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right)$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) \end{aligned}$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\ &\approx \end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

+

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &+ \vec{\phi}\times\left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right). \end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&+ \vec{\phi}\times\left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right).
\end{aligned}$$

Ostatni wyraz po prawej stronie możemy zaniedbać,

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &+ \vec{\phi}\times\left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right). \end{aligned}$$

Ostatni wyraz po prawej stronie możemy zaniedbać,

Obroty

gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\phi}$, więc

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\phi}$, więc

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zadanie. Pokazać, że ostatni wyraz możemy zapisać w formie

$$\vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = -\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, przy czym

$$S_x = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\phi}$, więc

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zadanie. Pokazać, że ostatni wyraz możemy zapisać w formie

$$\vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = -\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, przy czym

$$S_x = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

Zadanie. Pokazać, że macierz S_z można sprowadzić do postaci diagonalnej

$$S_z^{\text{diag.}} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obroty

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

Zadanie. Pokazać, że macierz S_z można sprowadzić do postaci diagonalnej

$$S_z^{\mathrm{diag.}} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

W takim razie

$$U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$$

$$=$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&=
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

Obroty

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$
U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J},
$$

W takim razie

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}). \end{aligned}$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J},$$

gdzie $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

W takim razie

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\phi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\phi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J},$$

gdzie $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Obroty

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Zadanie. Pokazać, że macierze spinowego momentu pędu $(S_x, S_y, S_z) \equiv (S_1, S_2, S_3)$ spełniają następujące reguły komutacyjne

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k.$$

Obroty

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Zadanie. Pokazać, że macierze spinowego momentu pędu $(S_x, S_y, S_z) \equiv (S_1, S_2, S_3)$ spełniają następujące reguły komutacyjne

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2\mathbb{I} = 1 \cdot (1+1)\hbar^2\mathbb{I} = s(s+1)\hbar^2\mathbb{I},$$

co odpowiada wartości $s = 1$.

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j]$$

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k
\end{aligned}$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger =$$

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\ &= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(L_k + S_k\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(L_k + S_k\right) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i = J_i,$$

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i = J_i,$$

Obroty

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.

Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$. Zwykle mówimy, że cząstka skalarna nie ma spinu.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$. Zwykle mówimy, że cząstka skalarna nie ma spinu.

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\phi + \Delta\phi) \quad = \quad U_R(\Delta\phi) U_R(\phi)$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony? Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\phi + \Delta\phi) = U_R(\Delta\phi)U_R(\phi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x\right) U_R(\phi)$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\phi + \Delta\phi) = U_R(\Delta\phi)U_R(\phi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x\right) U_R(\phi)$$

$$=$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\phi + \Delta\phi) &= U_R(\Delta\phi) U_R(\phi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x\right) U_R(\phi) \\ &= U_R(\phi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x U_R(\phi). \end{aligned}$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\phi + \Delta\phi) &= U_R(\Delta\phi) U_R(\phi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x\right) U_R(\phi) \\ &= U_R(\phi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x U_R(\phi). \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy

$$\frac{U_R(\phi + \Delta\phi) - U_R(\phi)}{\Delta\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót skończony?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma postać

$$\Delta\vec{\phi} = [\Delta\phi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\phi + \Delta\phi) &= U_R(\Delta\phi)U_R(\phi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x\right) U_R(\phi) \\ &= U_R(\phi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\phi J_x U_R(\phi). \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy

$$\frac{U_R(\phi + \Delta\phi) - U_R(\phi)}{\Delta\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

a w granicy $\Delta\phi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\phi$$

a w granicy $\Delta\phi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\phi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\phi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\phi} J_x \mathrm{d}\bar{\phi} =$$

Obroty skończone

a w granicy $\Delta\phi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\phi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\phi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\phi} J_x \mathrm{d}\bar{\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int\limits_0^{\phi} \mathrm{d}\bar{\phi} =$$

a w granicy $\Delta\phi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\phi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int_{U_R(0)}^{U_R(\phi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\phi} J_x \mathrm{d}\bar{\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int_0^{\phi} \mathrm{d}\bar{\phi} = -\frac{i}{\hbar} \phi J_x.$$

a w granicy $\Delta\phi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\phi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\phi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\phi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^\phi J_x \mathrm{d}\bar{\phi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int\limits_0^\phi \mathrm{d}\bar{\phi} = -\frac{i}{\hbar} \phi J_x.$$

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\phi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\phi) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

Obroty skończone

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\phi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\phi) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

a więc operator unitarny reprezentujący obrót skończony $\vec{\phi} = [\phi, 0, 0]$ ma postać

$$U_R(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi J_x}$$

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\phi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\phi) = -\frac{i}{\hbar}\phi J_x,$$

a więc operator unitarny reprezentujący obrót skończony $\vec{\phi} = [\phi, 0, 0]$ ma postać

$$U_R(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi J_x}$$

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} =$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}},$$

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}},$$

a więc operator unitarny reprezentujący dowolny obrót skończony ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}.$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}},$$

a więc operator unitarny reprezentujący dowolny obrót skończony ma postać

$$U_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}}.$$