

Obrazy

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Obraz Schrödingera

Rozważmy równanie Schrödingera z czasem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t),$$

gdzie

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t),$$

Obraz Schrödingera

Rozważmy równanie Schrödingera z czasem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t),$$

gdzie

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t),$$

a operator pędu w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Obraz Schrödingera

Rozważmy równanie Schrödingera z czasem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t),$$

gdzie

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t),$$

a operator pędu w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Przyjmijmy, że funkcje falowe $\psi(\vec{r}, t)$ są numerowane liczbami kwantowymi α i wprowadźmy notację Diraca

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \rightarrow |\alpha_S(t)\rangle.$$

Obraz Schrödingera

Rozważmy równanie Schrödingera z czasem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t),$$

gdzie

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t),$$

a operator pędu w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Przyjmijmy, że funkcje falowe $\psi(\vec{r}, t)$ są numerowane liczbami kwantowymi α i wprowadźmy notację Diraca

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \rightarrow |\alpha_S(t)\rangle.$$

Indeks S oznacza, że pracujemy w obrazie Schrödingera.

Ponieważ stan kwantowy układu możemy wyrazić nie tylko w reprezentacji położeniowej, ale w dowolnej innej reprezentacji,

Indeks S oznacza, że pracujemy w obrazie Schrödingera.

Ponieważ stan kwantowy układu możemy wyrazić nie tylko w reprezentacji położeniowej, ale w dowolnej innej reprezentacji, to pominęliśmy $\vec{r}$ w stanie *ket*.

Indeks S oznacza, że pracujemy w obrazie Schrödingera.

Ponieważ stan kwantowy układu możemy wyrazić nie tylko w reprezentacji położeniowej, ale w dowolnej innej reprezentacji, to pominęliśmy $\vec{r}$ w stanie *ket*.

Równanie Schrödingera w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie zamieniliśmy pochodną cząstkową po czasie na pochodną zupełną.

Równanie Schrödingera w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie zamieniliśmy pochodną cząstkową po czasie na pochodną zupełną.

Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t)| = \langle \alpha_S(t)| H^\dagger$$

Równanie Schrödingera w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie zamieniliśmy pochodną cząstkową po czasie na pochodną zupełną.

Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | = \langle \alpha_S(t) | H^\dagger = \langle \alpha_S(t) | H,$$

Równanie Schrödingera w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie zamieniliśmy pochodną cząstkową po czasie na pochodną zupełną.

Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t)| = \langle \alpha_S(t)| H^\dagger = \langle \alpha_S(t)| H,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator Hamiltona jest hermitowski.

Równanie Schrödingera w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie zamieniliśmy pochodną cząstkową po czasie na pochodną zupełną.

Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | = \langle \alpha_S(t) | H^\dagger = \langle \alpha_S(t) | H,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator Hamiltona jest hermitowski.

Założmy, że operator H nie zależy jawnie od czasu, wtedy rozwiązania równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ należy rozumieć jako rozwinięcie w szereg potęgowy

Założmy, że **operator H nie zależy jawnie od czasu**, wtedy rozwiązania równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ należy rozumieć jako rozwinięcie w szereg potęgowy

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0) \right]^n$$

Założmy, że **operator H nie zależy jawnie od czasu**, wtedy rozwiązania równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ należy rozumieć jako rozwinięcie w szereg potęgowy

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0) \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0) \right]^n H^n,$$

Założmy, że **operator H nie zależy jawnie od czasu**, wtedy rozwiązania równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ należy rozumieć jako rozwinięcie w szereg potęgowy

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0) \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0) \right]^n H^n,$$

gdzie

$$H^n \equiv \underbrace{H \circ H \circ \dots \circ H}_{n \text{ razy}}$$

jest n -krotnym złożeniem operatora H .

Zadanie. Pokazać, że podane wyżej wzory na $|\alpha_S(t)\rangle$ i $\langle\alpha_S(t)|$ są rozwiązaniami równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego.

gdzie

$$H^n \equiv \underbrace{H \circ H \circ \dots \circ H}_{n \text{ razy}}$$

jest n -krotnym złożeniem operatora H .

Zadanie. Pokazać, że podane wyżej wzory na $|\alpha_S(t)\rangle$ i $\langle\alpha_S(t)|$ są rozwiązaniami równania Schrödingera i równania do niego sprzężonego.

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle =$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle$$

+

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \Omega_S \left(\frac{d}{dt} | \beta_S(t) \rangle \right) \end{aligned}$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$ operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \Omega_S \left(\frac{d}{dt} | \beta_S(t) \rangle \right) \end{aligned}$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera, $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \Omega_S \left(\frac{d}{dt} | \beta_S(t) \rangle \right) = -\frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | H \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S H | \beta_S(t) \rangle \end{aligned}$$

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera, $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \Omega_S \left(\frac{d}{dt} | \beta_S(t) \rangle \right) = -\frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | H \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S H | \beta_S(t) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | (\Omega_S H - H \Omega_S) | \beta_S(t) \rangle \end{aligned}$$

Obraz Schrödingera

Rozważmy szybkość zmiany w czasie elementu macierzowego operatora Ω_S reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w obrazie Schrödingera, $\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \right) \Omega_S | \beta_S(t) \rangle + \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \Omega_S \left(\frac{d}{dt} | \beta_S(t) \rangle \right) = -\frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | H \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S H | \beta_S(t) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | (\Omega_S H - H \Omega_S) | \beta_S(t) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t) | \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} | \beta_S(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t) | [\Omega_S, H] | \beta_S(t) \rangle. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli operator Ω_S nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial \Omega_S}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad [\Omega_S, H] = 0,$$

Zauważmy, że jeśli operator Ω_S nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial \Omega_S}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad [\Omega_S, H] = 0,$$

to elementy macierzowe operatora Ω_S pomiędzy dowolnymi dwoma stanami kwantowymi $|\alpha_S(t)\rangle$ i $|\beta_S(t)\rangle$ nie zależą od czasu.

Zauważmy, że jeśli operator Ω_S nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial \Omega_S}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad [\Omega_S, H] = 0,$$

to elementy macierzowe operatora Ω_S pomiędzy dowolnymi dwoma stanami kwantowymi $|\alpha_S(t)\rangle$ i $|\beta_S(t)\rangle$ nie zależą od czasu.

Wtedy mówimy, że zmienna dynamiczna reprezentowana przez Ω_S jest stałą ruchu.

Zauważmy, że jeśli operator Ω_S nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial \Omega_S}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad [\Omega_S, H] = 0,$$

to elementy macierzowe operatora Ω_S pomiędzy dowolnymi dwoma stanami kwantowymi $|\alpha_S(t)\rangle$ i $|\beta_S(t)\rangle$ nie zależą od czasu.

Wtedy mówimy, że **zmienna dynamiczna reprezentowana przez Ω_S jest stałą ruchu.**

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle = \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \end{aligned}$$

+

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \end{aligned}$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) |\beta_S(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Wstawmy wzory

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t_0)\rangle, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \end{aligned}$$

do elementu macierzowego $\langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle$ wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &= \langle\alpha_S(t_0)| \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\beta_S(t_0)\rangle \\ &+ \langle\alpha_S(t_0)| e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \right) |\beta_S(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | He^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle$$

+

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | He^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \end{aligned}$$

—

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle\end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | He^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | H e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | \left[e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}, H \right] | \beta_S(t_0) \rangle ,\end{aligned}$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | He^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | \left[e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}, H \right] | \beta_S(t_0) \rangle ,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że

$$He^{\pm \frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} = e^{\pm \frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H.$$

Wykonajmy różniczkowanie eksponent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | He^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H | \beta_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \alpha_S(t_0) | e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} | \beta_S(t_0) \rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_S(t_0) | \left[e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}, H \right] | \beta_S(t_0) \rangle ,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że

$$He^{\pm \frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} = e^{\pm \frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} H.$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle \end{aligned}$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle \\ = & \end{aligned}$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle, \end{aligned}$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle, \end{aligned}$$

a więc element macierzowy operatora jest taki sam w obu obrazach.

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle, \end{aligned}$$

a więc element macierzowy operatora jest taki sam w obu obrazach.

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle =$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle$$
$$=$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\ &= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle\end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\ &= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\ &= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\ &= \langle \alpha_H | \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\frac{\partial \Omega_H}{\partial t}} | \beta_H \rangle\end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\frac{\partial \Omega_H}{\partial t}} | \beta_H \rangle \\&+ \end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\frac{\partial \Omega_H}{\partial t}} | \beta_H \rangle \\&+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | \left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H \right] | \beta_H \rangle ,\end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\frac{\partial \Omega_H}{\partial t}} | \beta_H \rangle \\&+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | \left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H \right] | \beta_H \rangle ,\end{aligned}$$

gdzie wyraz z komutatorem jest wynikiem różniczkowania obu eksponent.

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle &= \langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \right) | \beta_H \rangle \\&= \langle \alpha_H | \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\frac{\partial \Omega_H}{\partial t}} | \beta_H \rangle \\&+ \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | \left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H \right] | \beta_H \rangle ,\end{aligned}$$

gdzie wyraz z komutatorem jest wynikiem różniczkowania obu eksponent.

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | [\Omega_H, H] | \beta_H \rangle ,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle \alpha_H |$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy **równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga**

$$i\hbar \frac{d\Omega_H}{dt} = i\hbar \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H] .$$

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | [\Omega_H, H] | \beta_H \rangle ,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle \alpha_H |$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy **równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga**

$$i\hbar \frac{d\Omega_H}{dt} = i\hbar \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H] .$$

Zauważmy w tym miejscu analogię do formalizmu hamiltonowskiego mechaniki klasycznej.

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle \alpha_H | \frac{d\Omega_H}{dt} | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | [\Omega_H, H] | \beta_H \rangle ,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle \alpha_H |$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy **równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga**

$$i\hbar \frac{d\Omega_H}{dt} = i\hbar \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H] .$$

Zauważmy w tym miejscu analogię do formalizmu hamiltonowskiego mechaniki klasycznej.

Dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ współrzędnych i pędów uogólnionych oraz czasu zachodzi

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

Nawiasy Poissona

Dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ współrzędnych i pędów uogólnionych oraz czasu zachodzi

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

a po skorzystaniu z równań kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie H jest funkcją Hamiltona, a n jest liczbą stopni swobody klasycznego układu fizycznego,

Nawiasy Poissona

Dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ współrzędnych i pędów uogólnionych oraz czasu zachodzi

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

a po skorzystaniu z równań kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie H jest funkcją Hamiltona, a n jest liczbą stopni swobody klasycznego układu fizycznego, otrzymamy

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ współrzędnych i pędów uogólnionych oraz czasu zachodzi

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

a po skorzystaniu z równań kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie H jest funkcją Hamiltona, a n jest liczbą stopni swobody klasycznego układu fizycznego, otrzymamy

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dla dwóch funkcji różniczkowalnych f i g zmiennych q_i , p_i i t definiujemy **nawias Poissona**

$$[f, g] \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

przy użyciu których możemy zapisać

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy Poissona

Dla dwóch funkcji różniczkowalnych f i g zmiennych q_i , p_i i t definiujemy **nawias Poissona**

$$[f, g] \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

przy użyciu których możemy zapisać

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy fundamentalne są dane wzorami

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Nawiasy Poissona

Dla dwóch funkcji różniczkowalnych f i g zmiennych q_i , p_i i t definiujemy nawias Poissona

$$[f, g] \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

przy użyciu których możemy zapisać

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy fundamentalne są dane wzorami

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Nawiasy Poissona

Przypomnijmy, że nawiasy Poissona mają dokładnie takie same własności, co komutator operatorów liniowych.

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Analogiem nawiasów fundamentalnych są reguły kwantyzacji, które narzucamy na zmienne położeniowe i pędy

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.

Nawiasy Poissona

Przypomnijmy, że nawiasy Poissona mają dokładnie takie same własności, co komutator operatorów liniowych.

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Analogiem nawiasów fundamentalnych są **reguły kwantyzacji**, które narzucamy na zmienne położeniowe i pędy

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.

Od razu widzimy związek reguł kwantyzacji z nawiasami fundamentalnymi

$$\underbrace{[\ , \]}_{\text{nawiasy Poissona}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} \underbrace{[\ , \]}_{\text{komutator}}.$$

Nawiasy Poissona

Przypomnijmy, że nawiasy Poissona mają dokładnie takie same własności, co komutator operatorów liniowych.

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Analogiem nawiasów fundamentalnych są reguły kwantyzacji, które narzucamy na zmienne położeniowe i pędy

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.

Od razu widzimy związek reguł kwantyzacji z nawiasami fundamentalnymi

$$\underbrace{[\quad, \quad]}_{\text{nawiasy Poissona}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} \underbrace{[\quad, \quad]}_{\text{komutator}}.$$

Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H].$$

to otrzymamy kwantowomechaniczne równanie ruchu dla zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator Ω_H w obrazie Heisenberga

$$\frac{d\Omega_H}{dt} = \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_H, H].$$

Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H].$$

to otrzymamy kwantowomechaniczne równanie ruchu dla zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator Ω_H w obrazie Heisenberga

$$\frac{d\Omega_H}{dt} = \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_H, H].$$

Obraz oddziaływania

Obraz oddziaływania (interakcji) stosujemy wtedy, gdy hamiltonian układu można podzielić na dwie części

$$H = H_0 + V,$$

gdzie H_0 nie zależy jawnie od czasu i ma prostą strukturę.

Definiujemy

$$\begin{aligned} |\alpha_I(t)\rangle &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_I(t) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Obraz oddziaływania

Obraz oddziaływania (interakcji) stosujemy wtedy, gdy hamiltonian układu można podzielić na dwie części

$$H = H_0 + V,$$

gdzie H_0 nie zależy jawnie od czasu i ma prostą strukturę. Definiujemy

$$\begin{aligned} |\alpha_I(t)\rangle &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_I(t) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle, \end{aligned}$$

Obraz oddziaływania

Obraz oddziaływania (interakcji) stosujemy wtedy, gdy hamiltonian układu można podzielić na dwie części

$$H = H_0 + V,$$

gdzie H_0 nie zależy jawnie od czasu i ma prostą strukturę. Definiujemy

$$\begin{aligned} |\alpha_I(t)\rangle &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle, \\ \Omega_I(t) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_S(t) | \Omega_S | \beta_S(t) \rangle \\ = &\langle \alpha_S(t) | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_I \Omega_S \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_I | \beta_S(t) \rangle, \end{aligned}$$

a uwzględniając, że

$$|\beta_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle, \quad \langle\alpha_I(t)| = \langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)},$$
$$\Omega_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = & \underbrace{\langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}}_{\langle\alpha_I(t)|} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}}_{\Omega_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle}_{|\beta_I(t)\rangle} \end{aligned}$$

a uwzględniając, że

$$\begin{aligned} |\beta_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle, & \langle\alpha_I(t)| &= \langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}, \\ \Omega_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)| \Omega_S |\beta_S(t)\rangle \\ = & \underbrace{\langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\langle\alpha_I(t)|} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\Omega_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle}_{|\beta_I(t)\rangle} \\ = & \end{aligned}$$

a uwzględniając, że

$$\begin{aligned} |\beta_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle, & \langle\alpha_I(t)| &= \langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}, \\ \Omega_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = & \underbrace{\langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\langle\alpha_I(t)|} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\Omega_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle}_{|\beta_I(t)\rangle} \\ = & \langle\alpha_I(t)|\Omega_I(t)|\beta_I(t)\rangle, \end{aligned}$$

a uwzględniając, że

$$\begin{aligned} |\beta_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle, & \langle\alpha_I(t)| &= \langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}, \\ \Omega_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = & \underbrace{\langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\langle\alpha_I(t)|} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\Omega_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle}_{|\beta_I(t)\rangle} \\ = & \langle\alpha_I(t)|\Omega_I(t)|\beta_I(t)\rangle, \end{aligned}$$

a więc element macierzowy operatora pozostaje niezmienny.

a uwzględniając, że

$$\begin{aligned} |\beta_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle, & \langle\alpha_I(t)| &= \langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}, \\ \Omega_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = & \underbrace{\langle\alpha_S(t)| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\langle\alpha_I(t)|} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{\Omega_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\beta_S(t)\rangle}_{|\beta_I(t)\rangle} \\ = & \langle\alpha_I(t)|\Omega_I(t)|\beta_I(t)\rangle, \end{aligned}$$

a więc element macierzowy operatora pozostaje niezmienny.

Zauważmy, że z uwagi na fakt, że H_0 nie musi komutować z $H = H_S$, to

$$H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \neq H_S,$$

natomiast

$$H_{0I}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_0 S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} = H_0 S e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)}$$

Zauważmy, że z uwagi na fakt, że H_0 nie musi komutować z $H = H_S$, to

$$H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \neq H_S,$$

natomiast

$$\begin{aligned} H_{0I}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_{0S} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} = H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że z uwagi na fakt, że H_0 nie musi komutować z $H = H_S$, to

$$H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \neq H_S,$$

natomiast

$$\begin{aligned} H_{0I}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_0 S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} = H_0 S e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \\ &= H_0 S. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z uwagi na fakt, że H_0 nie musi komutować z $H = H_S$, to

$$H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \neq H_S,$$

natomiast

$$\begin{aligned} H_{0I}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} H_0 S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} = H_0 S e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} \\ &= H_0 S. \end{aligned}$$

Obliczmy

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right)$$

Obliczmy

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_0 S(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right)$$
$$=$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle \\ &+ \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle \\ &+ \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} V_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{V_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle}_{|\alpha_I(t)\rangle}. \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_S |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} (H_{0S} + V_S) |\alpha_S(t)\rangle \\ &= -H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle + H_{0S} |\alpha_I(t)\rangle \\ &+ \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} V_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}}_{V_I(t)} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} |\alpha_S(t)\rangle}_{|\alpha_I(t)\rangle}. \end{aligned}$$

Obraz oddziaływania

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle .$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny.

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle .$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny.

Obliczmy

$$\frac{d}{dt} \Omega_I(t) =$$

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle .$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\frac{d}{dt} \Omega_I(t) = \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)}$$

Obraz oddziaływania

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle .$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle.$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle .$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \end{aligned}$$

—

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle.$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_{0S}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy **równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania**

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle.$$

Tego typu przedstawienie jest wygodne szczególnie wtedy, gdy $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny. Obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} \Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_{0S}(t-t_0)} H_{0S}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \frac{i}{\hbar}H_0Se^{\frac{i}{\hbar}H_0S(t-t_0)}\Omega_Se^{-\frac{i}{\hbar}H_0S(t-t_0)}$$

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \frac{i}{\hbar}H_0Se^{\frac{i}{\hbar}H_0S(t-t_0)}\Omega_Se^{-\frac{i}{\hbar}H_0S(t-t_0)} +$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_{0S}\Omega_I + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}\Omega_I H_{0S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_{0S}\Omega_I + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}\Omega_I H_{0S} \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_{0S}\Omega_I + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}\Omega_I H_{0S} \\ &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}[\Omega_I, H_{0I}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_{0S}\Omega_I + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}\Omega_I H_{0S} \\ &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}[\Omega_I, H_{0I}],\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równość $H_{0I} = H_{0S}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Omega_I(t) &= \frac{i}{\hbar}H_{0S}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)} \\ &- \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}(t-t_0)}H_{0S} \\ &= -\frac{1}{i\hbar}H_{0S}\Omega_I + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}\Omega_I H_{0S} \\ &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar}[\Omega_I, H_{0I}],\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równość $H_{0I} = H_{0S}$.

W takim razie równanie ewolucji operatora w obrazie oddziaływania ma postać

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_{0I}],$$

przy czym $H_{0I} = H_{0S} = H_0$.

Widzimy, że

W takim razie równanie ewolucji operatora w obrazie oddziaływania ma postać

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_{0I}],$$

przy czym $H_{0I} = H_{0S} = H_0$.

Widzimy, że

w obrazie Schrödingera ewolucji czasowej podlegają stany kwantowomechaniczne,

W takim razie równanie ewolucji operatora w obrazie oddziaływania ma postać

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_{0I}],$$

przy czym $H_{0I} = H_{0S} = H_0$.

Widzimy, że

w obrazie Schrödingera ewolucji czasowej podlegają stany kwantowomechaniczne,

w obrazie Heisenberga ewoluują zmienne dynamiczne,

W takim razie równanie ewolucji operatora w obrazie oddziaływania ma postać

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_{0I}],$$

przy czym $H_{0I} = H_{0S} = H_0$.

Widzimy, że

w obrazie Schrödingera ewolucji czasowej podlegają stany kwantowomechaniczne,

w obrazie Heisenberga ewoluują zmienne dynamiczne,
a w obrazie oddziaływania ewoluują zarówno stany kwantowomechaniczne jak i zmienne dynamiczne.

W takim razie równanie ewolucji operatora w obrazie oddziaływania ma postać

$$\frac{d}{dt}\Omega_I(t) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_I + \frac{1}{i\hbar} [\Omega_I, H_{0I}],$$

przy czym $H_{0I} = H_{0S} = H_0$.

Widzimy, że

w obrazie Schrödingera ewolucji czasowej podlegają stany kwantowomechaniczne,

w obrazie Heisenberga ewoluują zmienne dynamiczne,

a w obrazie oddziaływania ewoluują zarówno stany kwantowomechaniczne jak i zmienne dynamiczne.

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny, to równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

może posłużyć jako punkt wyjścia do rozwinięcia perturbacyjnego.

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny, to równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

może posłużyć jako punkt wyjścia do [rozwinęcia perturbacyjnego](#). Zdefiniujmy operator ewolucji czasowej w obrazie oddziaływania $U_I(t', t)$.

$$|\alpha_I(t')\rangle = U_I(t', t) |\alpha_I(t)\rangle,$$

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny, to równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

może posłużyć jako punkt wyjścia do [rozwinienia perturbacyjnego](#). Zdefiniujemy operator ewolucji czasowej w obrazie oddziaływania $U_I(t', t)$.

$$|\alpha_I(t')\rangle = U_I(t', t) |\alpha_I(t)\rangle, \quad U_I(t, t) = 1.$$

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny, to równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

może posłużyć jako punkt wyjścia do [rozwinienia perturbacyjnego](#). Zdefiniujemy operator ewolucji czasowej w obrazie oddziaływania $U_I(t', t)$.

$$|\alpha_I(t')\rangle = U_I(t', t) |\alpha_I(t)\rangle, \quad U_I(t, t) = 1.$$

Operator ewolucji $U_I(t', t)$ spełnia takie samo równanie co wektor stanu $|\alpha_I(t)\rangle$.

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, np. ładunek elektryczny, to równanie ewolucji stanu w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

może posłużyć jako punkt wyjścia do [rozwinienia perturbacyjnego](#). Zdefiniujemy operator ewolucji czasowej w obrazie oddziaływania $U_I(t', t)$.

$$|\alpha_I(t')\rangle = U_I(t', t) |\alpha_I(t)\rangle, \quad U_I(t, t) = 1.$$

Operator ewolucji $U_I(t', t)$ spełnia takie samo równanie co wektor stanu $|\alpha_I(t)\rangle$.

Rzeczywiście, obliczmy

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle =$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= V_I(t) U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= V_I(t) U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy dowolnie wybranym stanie początkowym $|\alpha_I(t_0)\rangle$ otrzymamy

Rozwinięcie perturbacyjne

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= V_I(t) U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy dowolnie wybranym stanie początkowym $|\alpha_I(t_0)\rangle$ otrzymamy

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0).$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= V_I(t) U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy dowolnie wybranym stanie początkowym $|\alpha_I(t_0)\rangle$ otrzymamy

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0).$$

Scałkujemy obustronnie to równanie

$$i\hbar \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} U_I(t', t_0) dt' = \int_{t_0}^t V_I(t') U_I(t', t_0) dt'.$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle = V_I(t) |\alpha_I(t)\rangle \\ &= V_I(t) U_I(t, t_0) |\alpha_I(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy dowolnie wybranym stanie początkowym $|\alpha_I(t_0)\rangle$ otrzymamy

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0).$$

Scałkujmy obustronnie to równanie

$$i\hbar \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} U_I(t', t_0) dt' = \int_{t_0}^t V_I(t') U_I(t', t_0) dt'.$$

$$i\hbar(U_I(t, t_0) - U_I(t_0, t_0)) = \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

Po prostych przekształceniach i skorzystaniu z warunku $U_I(t_0, t_0) = 1$ otrzymamy równanie na operator ewolucji w formie całkowej

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

$$i\hbar(U_I(t, t_0) - U_I(t_0, t_0)) = \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

Po prostych przekształceniach i skorzystaniu z warunku $U_I(t_0, t_0) = 1$ otrzymamy równanie na operator ewolucji w formie całkowej

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

Równanie to można iterować.

$$i\hbar(U_I(t, t_0) - U_I(t_0, t_0)) = \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

Po prostych przekształceniach i skorzystaniu z warunku $U_I(t_0, t_0) = 1$ otrzymamy równanie na operator ewolucji w formie całkowej

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t')U_I(t', t_0)dt'.$$

Równanie to można iterować.

Rozwinięcie perturbacyjne

Założmy $t \geq t_1 \geq t_0$ i dokonajmy pierwszej iteracji

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_1$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Założmy $t \geq t_1 \geq t_0$ i dokonajmy pierwszej iteracji

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_1$$

=

Rozwinięcie perturbacyjne

Założmy $t \geq t_1 \geq t_0$ i dokonajmy pierwszej iteracji

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_1 \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1) V_I(t') U_I(t', t_0) dt' dt_1 \end{aligned}$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Założmy $t \geq t_1 \geq t_0$ i dokonajmy pierwszej iteracji

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_1 \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1) V_I(t') U_I(t', t_0) dt' dt_1 \end{aligned}$$

W drugiej iteracji, przy $t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_0$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1) V_I(t_2) \left(1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_2} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Założmy $t \geq t_1 \geq t_0$ i dokonajmy pierwszej iteracji

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_1 \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1) V_I(t') U_I(t', t_0) dt' dt_1 \end{aligned}$$

W drugiej iteracji, przy $t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_0$ dostaniemy

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V_I(t_1) V_I(t_2) \left(1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_2} V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \right) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Powtarzając tę procedurę otrzymamy wzór na rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n),$$

gdzie w n -tej iteracji założyliśmy uporządkowanie czasowe $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq t_0$.

Wprowadźmy **iloczyn chronologiczny** operatorów

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] \\ & \equiv \begin{cases} V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n), & \text{dla } t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwinięcie perturbacyjne

Powtarzając tę procedurę otrzymamy wzór na rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n),$$

gdzie w n -tej iteracji założyliśmy uporządkowanie czasowe $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq t_0$.

Wprowadźmy **iloczyn chronologiczny** operatorów

$$\begin{aligned} T[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] \\ \equiv \begin{cases} V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n), & \text{dla } t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wówczas rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji możemy zapisać w formie

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} [V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)],$$

gdzie wszystkie górne granice całkowania są sobie równe.

Zadanie. Uzasadnić występowanie czynnika $\frac{1}{n!}$ w powyższym wzorze.

Wówczas rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji możemy zapisać w formie

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} [V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)],$$

gdzie wszystkie górne granice całkowania są sobie równe.

Zadanie. Uzasadnić występowanie czynnika $\frac{1}{n!}$ w powyższym wzorze.

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, to w praktyce wystarczy obliczyć kilka pierwszych wyrazów rozwinięcia operatora $U_I(t, t_0)$.

Wówczas rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji możemy zapisać w formie

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} [V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)],$$

gdzie wszystkie górne granice całkowania są sobie równe.

Zadanie. Uzasadnić występowanie czynnika $\frac{1}{n!}$ w powyższym wzorze.

Jeżeli $V_I(t)$ zawiera jakiś mały parametr, to w praktyce wystarczy obliczyć kilka pierwszych wyrazów rozwinięcia operatora $U_I(t, t_0)$.

Rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji znajduje zastosowanie w teorii rozprośzeń, gdzie definiujemy operator rozpraszania S , który utożsamiamy z operatorem ewolucji

$$S = U_I(-\infty, +\infty).$$

Rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji znajduje zastosowanie w teorii rozprośzeń, gdzie definiujemy **operator rozpraszania S** , który utożsamiamy z operatorem ewolucji

$$S = U_I(-\infty, +\infty).$$

Na długo przed rozproszeniem, tzn. dla $t \rightarrow -\infty$, i na długo po rozproszeniu, tzn. dla $t \rightarrow +\infty$, ewolucja czasowa układu kwantowego jest opisywana hamiltonianem H_0 i mamy do czynienia z tzw. **stanami asymptotycznie swobodnymi**.

Rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji znajduje zastosowanie w teorii rozprośzeń, gdzie definiujemy **operator rozpraszania** S , który utożsamiamy z operatorem ewolucji

$$S = U_I(-\infty, +\infty).$$

Na długo przed rozproszeniem, tzn. dla $t \rightarrow -\infty$, i na długo po rozproszeniu, tzn. dla $t \rightarrow +\infty$, ewolucja czasowa układu kwantowego jest opisywana hamiltonianem H_0 i mamy do czynienia z tzw. **stanami asymptotycznie swobodnymi**.

W praktyce wystarczy założyć, że czas przed i po zderzeniu jest znacznie dłuższy niż czas trwania aktu rozpraszania, który zwykle jest bardzo krótki.

Rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji znajduje zastosowanie w teorii rozprośzeń, gdzie definiujemy **operator rozpraszania** S , który utożsamiamy z operatorem ewolucji

$$S = U_I(-\infty, +\infty).$$

Na długo przed rozproszeniem, tzn. dla $t \rightarrow -\infty$, i na długo po rozproszeniu, tzn. dla $t \rightarrow +\infty$, ewolucja czasowa układu kwantowego jest opisywana hamiltonianem H_0 i mamy do czynienia z tzw. **stanami asymptotycznie swobodnymi**.

W praktyce wystarczy założyć, że czas przed i po zderzeniu jest znacznie dłuższy niż czas trwania aktu rozpraszania, który zwykle jest bardzo krótki.

Zgodnie z naszą definicją, stan $|\psi\rangle$ układu dla $t \rightarrow +\infty$ wiąże się z asymptotycznie swobodnym stanem początkowym $|i\rangle$ dla $t \rightarrow -\infty$ wzorem

$$|\psi\rangle = S |i\rangle.$$

Amplituda prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie końcowym $\langle f|$ wyraża się wzorem:

$$\langle f|\psi\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi},$$

a więc jest odpowiednim elementem macierzowym operatora S , który w związku z tym nazywa się często macierzą rozpraszania.

Zgodnie z naszą definicją, stan $|\psi\rangle$ układu dla $t \rightarrow +\infty$ wiąże się z asymptotycznie swobodnym stanem początkowym $|i\rangle$ dla $t \rightarrow -\infty$ wzorem

$$|\psi\rangle = S |i\rangle.$$

Amplituda prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie końcowym $\langle f|$ wyraża się wzorem:

$$\langle f|\psi\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi},$$

a więc jest odpowiednim elementem macierzowym operatora S , który w związku z tym nazywa się często macierzą rozpraszania.

Zauważmy, że pierwszy wyraz we wzorze na rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji jest równy 1 $\Rightarrow$ nie będzie on powodował zmiany stanu początkowego.

Dlatego operator rozpraszania najczęściej zapisuje się jako

$$S = 1 + T,$$

a elementy macierzowe mają w związku z tym postać

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|T|i\rangle = \delta_{fi} + T_{fi}.$$

Zauważmy, że pierwszy wyraz we wzorze na rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji jest równy 1 $\Rightarrow$ nie będzie on powodował zmiany stanu początkowego. Dlatego operator rozpraszania najczęściej zapisuje się jako

$$S = 1 + T,$$

a elementy macierzowe mają w związku z tym postać

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|T|i\rangle = \delta_{fi} + T_{fi}.$$

Ponieważ stany własne hamiltonianu H_0 dla różnych wartości energii są ortogonalne, to $\langle f|i\rangle \neq 0$ tylko jeśli $|f\rangle = |i\rangle$.

Zauważmy, że pierwszy wyraz we wzorze na rozwinięcie perturbacyjne operatora ewolucji jest równy 1 $\Rightarrow$ nie będzie on powodował zmiany stanu początkowego. Dlatego operator rozpraszania najczęściej zapisuje się jako

$$S = 1 + T,$$

a elementy macierzowe mają w związku z tym postać

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|T|i\rangle = \delta_{fi} + T_{fi}.$$

Ponieważ stany własne hamiltonianu H_0 dla różnych wartości energii są ortogonalne, to $\langle f|i\rangle \neq 0$ tylko jeśli $|f\rangle = |i\rangle$.

W eksperymentach rozproszeniowych zwykle interesują nas stany $|f\rangle \neq |i\rangle$, a więc elementy macierzowe T_{fi} operatora T , które wtedy są tożsame z elementami macierzowymi S_{fi} .

Przykładowo, w asymptotycznym wyrażeniu na falę rozproszoną

$$u(\vec{r}) = u(r, \theta, \varphi) = A \left[e^{ikz} + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{ikr} \right],$$

elementy macierzowe T_{fi} wiążą się bezpośrednio z amplitudą rozpraszania $f(\theta, \varphi)$.

W eksperymentach rozproszeniowych zwykle interesują nas stany $|f\rangle \neq |i\rangle$, a więc elementy macierzowe T_{fi} operatora T , które wtedy są tożsame z elementami macierzowymi S_{fi} .

Przykładowo, w asymptotycznym wyrażeniu na falę rozproszoną

$$u(\vec{r}) = u(r, \theta, \varphi) = A \left[e^{ikz} + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{ikr} \right],$$

elementy macierzowe T_{fi} wiążą się bezpośrednio z amplitudą rozpraszania $f(\theta, \varphi)$.