Atom wodoru

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Atom wodoru lub jon wodoropodobny jest to układ złożony z jądra i jednego elektronu.

Jądro składa się z Z dodatnio naładowanych protonów i dowolnej liczby neutronów.

Atom wodoru lub jon wodoropodobny jest to układ złożony z jądra i jednego elektronu.

Jądro składa się z Z dodatnio naładowanych protonów i dowolnej liczby neutronów.

Jądro ma ładunek $+Ze$ a elektron $-e$, dlatego energia potencjalna elektronu w polu kulombowskim jądra ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Atom wodoru lub jon wodoropodobny jest to układ złożony z jądra i jednego elektronu.

Jądro składa się z Z dodatnio naładowanych protonów i dowolnej liczby neutronów.

Jądro ma ładunek $+Ze$ a elektron $-e$, dlatego energia potencjalna elektronu w polu kulombowskim jądra ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Wykorzystujemy tu układ jednostek, w którym współczynnik $k = 1$.

Atom wodoru lub jon wodoropodobny jest to układ złożony z jądra i jednego elektronu.

Jądro składa się z Z dodatnio naładowanych protonów i dowolnej liczby neutronów.

Jądro ma ładunek $+Ze$ a elektron $-e$, dlatego energia potencjalna elektronu w polu kulombowskim jądra ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Wykorzystujemy tu układ jednostek, w którym współczynik $k = 1$.

W najprostszej formie jądro atomu wodoru składa się z jednego protonu.

Atom wodoru lub jon wodoropodobny jest to układ złożony z jądra i jednego elektronu.

Jądro składa się z Z dodatnio naładowanych protonów i dowolnej liczby neutronów.

Jądro ma ładunek $+Ze$ a elektron $-e$, dlatego energia potencjalna elektronu w polu kulombowskim jądra ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Wykorzystujemy tu układ jednostek, w którym współczynik $k = 1$.

W najprostszej formie jądro atomu wodoru składa się z jednego protonu.

Równanie Schrödingera opisujące taki dwuciałowy układ ma postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t),$$

gdzie $\vec{r}_1=[x_1,y_1,z_1]$ i $\vec{r}_2=[x_2,y_2,z_2]$ opisują odpowiednio położenia jądra i elektronu,

Równanie Schrödingera opisujące taki dwuciałowy układ ma postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t),$$

gdzie $\vec{r}_1=[x_1,y_1,z_1]$ i $\vec{r}_2=[x_2,y_2,z_2]$ opisują odpowiednio położenia jądra i elektronu, m_1 i m_2 są ich masami,

Równanie Schrödingera opisujące taki dwuciałowy układ ma postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t),$$

gdzie $\vec{r}_1=[x_1,y_1,z_1]$ i $\vec{r}_2=[x_2,y_2,z_2]$ opisują odpowiednio położenia jądra i elektronu, m_1 i m_2 są ich masami, operatory $\nabla^2_{\vec{r}_1}$ i $\nabla^2_{\vec{r}_2}$ we współrzędnych kartezjańskiech dane są wzorami

$$\nabla^2_{\vec{r}_1}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2},\qquad \nabla^2_{\vec{r}_2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2},$$

Równanie Schrödingera opisujące taki dwuciałowy układ ma postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t),$$

gdzie $\vec{r}_1=[x_1,y_1,z_1]$ i $\vec{r}_2=[x_2,y_2,z_2]$ opisują odpowiednio położenia jądra i elektronu, m_1 i m_2 są ich masami, operatory $\nabla^2_{\vec{r}_1}$ i $\nabla^2_{\vec{r}_2}$ we współrzędnych kartezjańskiech dane są wzorami

$$\nabla^2_{\vec{r}_1}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2},\qquad \nabla^2_{\vec{r}_2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2},$$

a $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ jest niezależną od czasu energią potencjalną wzajemnego oddziaływania jądra i elektronu.

Równanie Schrödingera opisujące taki dwuciałowy układ ma postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t),$$

gdzie $\vec{r}_1=[x_1,y_1,z_1]$ i $\vec{r}_2=[x_2,y_2,z_2]$ opisują odpowiednio położenia jądra i elektronu, m_1 i m_2 są ich masami, operatory $\nabla^2_{\vec{r}_1}$ i $\nabla^2_{\vec{r}_2}$ we współrzędnych kartezjańskiech dane są wzorami

$$\nabla^2_{\vec{r}_1}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2},\qquad \nabla^2_{\vec{r}_2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2},$$

a $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ jest niezależną od czasu energią potencjalną wzajemnego oddziaływania jądra i elektronu.

Separacja zależności od czasu

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} =$$

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Separacja zależności od czasu

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} =$$

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Lewa strona zależy tylko od t,

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Lewa strona zależy tylko od t, a prawa od $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$.

Separacja zależności od czasu

Ponieważ energia potencjalna nie zależy od czasu, to możemy odseparować zależność od czasu. Podstawmy

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$$

do równania Schrödingera dla atomu wodoru

$$i\hbar\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Dzieląc obie strony przez $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(t)$ otrzymamy

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Lewa strona zależy tylko od t,a prawa od $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$.

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$

$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$

$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

Separacja zależności od czasu

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$

$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t$$

Separacja zależności od czasu

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$
$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln f(t) = -\frac{i}{\hbar}E't + \ln C$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$
$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln f(t) = -\frac{i}{\hbar}E't + \ln C \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}E't}.$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$
$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln f(t) = -\frac{i}{\hbar}E't + \ln C \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}E't}.$$

Stałą dowolną C możemy przyjąć równą 1 i dobrać odpowiednio stałą normalizacyjną funkcji $\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ tak,

Separacja zależności od czasu

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$
$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln f(t) = -\frac{i}{\hbar}E't + \ln C \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}E't}.$$

Stałą dowolną C możemy przyjąć równą 1 i dobrać odpowiednio stałą normalizacyjną funkcji $\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ tak, aby funkcja falowa $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)f(t)$ była unormowana.

Dlatego obie strony muszą być równe stałej sepapracji, którą oznaczymy E'

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = E',$$
$$\frac{1}{\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'.$$

Pierwsze równanie można łatwo scałkować

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{i}{\hbar}E'\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln f(t) = -\frac{i}{\hbar}E't + \ln C \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}E't}.$$

Stałą dowolną C możemy przyjąć równą 1 i dobrać odpowiednio stałą normalizacyjną funkcji $\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ tak, aby funkcja falowa $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)f(t)$ była unormowana.

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu,

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2) =$$

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)=$$

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)=V\left(|\vec{r}|\right)=$$

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)=V\left(|\vec{r}|\right)=V(r)=$$

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) = V\left(|\vec{r}|\right) = V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

Separacja części przestrzennej

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) = V\left(|\vec{r}|\right) = V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

gdzie $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ jest wektorem względnego położenia jądra i elektronu.

Drugie równanie, na część przestrzenną funkcji falowej, ma postać równania własnego dwucząstkowego operatora Hamiltona

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2).$$

Pierwszy i drugi wyraz po lewej stronie reprezentują odpowiednio energię kinetyczną jądra i energię kinetyczną elektronu, a energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości elektronu i jądra

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)=V\left(|\vec{r}|\right)=V(r)=-\frac{Ze^2}{r},$$

gdzie $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ jest wektorem względnego położenia jądra i elektronu.

Separacja części przestrzennej

W ramach kursu mechaniki teoretycznej pokazaliśmy, że ruch takiego odosobnionego układu dwóch ciał można rozłożyć na ruch środka masy układu i ruch względny.

W tym celu wprowadźmy jeszcze współrzędne środka masy układu jądro-elektron

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

W ramach kursu mechaniki teoretycznej pokazaliśmy, że ruch takiego odosobnionego układu dwóch ciał można rozłożyć na ruch środka masy układu i ruch względny.
W tym celu wprowadźmy jeszcze współrzędne środka masy układu jądro-elektron

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M},$$

Separacja części przestrzennej

W ramach kursu mechaniki teoretycznej pokazaliśmy, że ruch takiego odosobnionego układu dwóch ciał można rozłożyć na ruch środka masy układu i ruch względny.
W tym celu wprowadźmy jeszcze współrzędne środka masy układu jądro-elektron

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}, \quad \text{gdzie} \quad M = m_1 + m_2.$$

Separacja części przestrzennej

W ramach kursu mechaniki teoretycznej pokazaliśmy, że ruch takiego odosobnionego układu dwóch ciał można rozłożyć na ruch środka masy układu i ruch względny.
W tym celu wprowadźmy jeszcze współrzędne środka masy układu jądro-elektron

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad \text{gdzie} \quad M = m_1 + m_2.$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} \quad = \quad [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$

$\vec{R}$

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} =$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} = [X, Y, Z]$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$

$$\vec{R} = [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],\\ \vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1x_1 + m_2x_2, m_1y_1 + m_2y_2, m_1z_1 + m_2z_2]\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} = [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1x_1 + m_2x_2, m_1y_1 + m_2y_2, m_1z_1 + m_2z_2]$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} =$$

Oznaczmy

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2], \\
\vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]
\end{aligned}
$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$
\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}
$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],\\ \vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}\\ &=\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} = [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1x_1 + m_2x_2, m_1y_1 + m_2y_2, m_1z_1 + m_2z_2]$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X},\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2], \\ \vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],\\ \vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1x_1 + m_2x_2, m_1y_1 + m_2y_2, m_1z_1 + m_2z_2]\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}\\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X},\\ \frac{\partial}{\partial x_2} &=\end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} = [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Z}$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\vec{r} = [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$
$$\vec{R} = [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Z}$$
$$=$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2], \\
\vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2]
\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}, \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Z} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}.
\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],\\ \vec{R} &= [X, Y, Z] = \frac{1}{M}[m_1x_1 + m_2x_2, m_1y_1 + m_2y_2, m_1z_1 + m_2z_2]\end{aligned}$$

i dokonajmy zamiany zmiennych w operatorach różniczkowych.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial Z}\\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X},\\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial Z}\\ &= -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}.\end{aligned}$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} =$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

Zamiana zmiennych

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$=$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} =$$

Obliczmy teraz

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)
\end{aligned}
$$

Obliczmy teraz

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Utwórzmy kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Zamiana zmiennych

Utwórzmy kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$=$$

Zamiana zmiennych

Utwórzmy kombinację

$$
-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}
$$

$$
= \quad -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]
$$

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= \quad &
\end{aligned}
$$

Zamiana zmiennych

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M^2}(m_1 + m_2)\frac{\partial^2}{\partial X^2}
\end{aligned}
$$

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M^2}(m_1 + m_2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\
= \quad &
\end{aligned}
$$

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= & -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M^2}(m_1 + m_2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\
= & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2},
\end{aligned}
$$

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M^2}(m_1 + m_2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2},
\end{aligned}
$$

gdzie $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest odwrotnością masy zredukowanej.

Utwórzmy kombinację

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
& -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{m_2}{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M^2}(m_1 + m_2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\
= \quad & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2},
\end{aligned}
$$

gdzie $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest odwrotnością masy zredukowanej.

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} =$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$$

Zamiana zmiennych

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} =$$

Zamiana zmiennych

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

Zamiana zmiennych

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \quad &= \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \\
-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \quad &= \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{\partial^2}{\partial Z^2},
\end{aligned}
$$

a więc możemy obliczyć kombinację

Zamiana zmiennych

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}=$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_{\vec{r}_1}^2-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_{\vec{r}_2}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)=$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) =$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}}.$$

W analogiczny sposób otrzymamy wzory

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

a więc możemy obliczyć kombinację

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}}.$$

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}}+V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R})=E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

Separacja części przestrzennej

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2} + V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\nabla^2_{\vec{r}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla^2_{\vec{r}_2}+V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}}+V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R})=E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\nabla^2_{\vec{r}}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \nabla^2_{\vec{R}}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2}+V\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E'\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}}+V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R})=E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\nabla^2_{\vec{r}}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \nabla^2_{\vec{R}}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

oraz

$$\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R})=\phi\left(\vec{r}_1(\vec{r},\vec{R}),\vec{r}_2(\vec{r},\vec{R})\right).$$

W takim razie równanie na część przestrzenną funkcji falowej

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{\vec{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{\vec{r}_2} + V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)\right]\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E'\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

przyjmuje w nowych zmiennych postać

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\nabla^2_{\vec{r}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \nabla^2_{\vec{R}} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

oraz

$$\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = \phi\left(\vec{r}_1(\vec{r}, \vec{R}), \vec{r}_2(\vec{r}, \vec{R})\right).$$

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\,(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r})$$

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R})$$

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r)\,u(\vec{r})U(\vec{R}) =$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V\left(r\right)u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r)\,u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V\left(r\right)u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r})$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V\left(r\right)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V\left(r\right)u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R})$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r)\,u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r) =$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r)\,u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r) = E'.$$

Separacja części przestrzennej

Podstawmy $\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = u(\vec{r})U(\vec{R})$ do równania

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}} + V(r)\right]\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}) = E'\tilde{\phi}(\vec{r}, \vec{R}),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{R})\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}u(\vec{r})\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r)\,u(\vec{r})U(\vec{R}) = E'u(\vec{r})U(\vec{R}).$$

Dzieląc obie strony przez $u(\vec{r})U(\vec{R})$ dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) + V(r) = E'.$$

Rozdzielmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r})+V(r)=E'+\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}).$$

Lewa strona równania zależy tylko od $\vec{r}$, a prawa tylko od $\vec{R}$,

Separacja części przestrzennej

Rozdzielmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) = E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}).$$

Lewa strona równania zależy tylko od $\vec{r}$, a prawa tylko od $\vec{R}$, dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy E.

Rozdzielmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) = E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}).$$

Lewa strona równania zależy tylko od $\vec{r}$, a prawa tylko od $\vec{R}$, dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy E.

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r)$$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) \quad =$$

Separacja części przestrzennej

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) \quad = \quad E,$$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) = E,$$

$$E' + \frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R})$$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V\left(r\right) &= E, \\ E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) &= \end{aligned}$$

Separacja części przestrzennej

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) &= E, \\ E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) &= E. \end{aligned}$$

Separacja części przestrzennej

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) &= E, \\
E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) &= E.
\end{aligned}
$$

Drugie równanie możemy zapisać w formie

$$E' - E = -\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}),$$

Separacja części przestrzennej

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r) &= E, \\ E' + \frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) &= E. \end{aligned}$$

Drugie równanie możemy zapisać w formie

$$E' - E = -\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}),$$

a wprowadzając nową stałą $E_{\mathrm{CM}} \equiv E' - E$ i mnożąc obustronnie przez $U(\vec{R})$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{u(\vec{r})}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r})+V(r) &= E, \\ E'+\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) &= E. \end{aligned}$$

Drugie równanie możemy zapisać w formie

$$E'-E=-\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{1}{U(\vec{R})}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}),$$

a wprowadzając nową stałą $E_{\mathrm{CM}} \equiv E' - E$ i mnożąc obustronnie przez $U(\vec{R})$

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}}U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}} U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.

Pierwsze równanie po przemnożeniu przez $u(\vec{r})$ przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Separacja części przestrzennej

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}}U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.
Pierwsze równanie po przemnożeniu przez $u(\vec{r})$ przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V\left(r\right)u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Opisuje ono ruch elektronu,

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\vec{R}}U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}}U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.
Pierwsze równanie po przemnożeniu przez $u(\vec{r})$ przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\vec{r}}u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Opisuje ono ruch elektronu, a ściślej cząstki o masie zredukowanej $m \approx m_e$,

Separacja części przestrzennej

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}} U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.
Pierwsze równanie po przemnożeniu przez $u(\vec{r})$ przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Opisuje ono ruch elektronu, a ściślej cząstki o masie zredukowanej $m \approx m_e$, w sferycznie symetrycznym potencjale kulombowskim jądra.

Separacja części przestrzennej

możemy je zapisać w następującej postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^2_{\vec{R}} U(\vec{R}) = E_{\mathrm{CM}} U(\vec{R}).$$

Równanie to opisuje swobodny ruch środka masy układu jądro-elektron.
Pierwsze równanie po przemnożeniu przez $u(\vec{r})$ przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2_{\vec{r}} u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Opisuje ono ruch elektronu, a ściślej cząstki o masie zredukowanej $m \approx m_e$, w sferycznie symetrycznym potencjale kulombowskim jądra.

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_e}$$

Separacja części przestrzennej

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e}.$$

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e}.$$

Skąd wynika, że $m \approx m_e$.

Separacja części przestrzennej

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e}.$$

Skąd wynika, że $m \approx m_e$.

Przybliżenie to jest bardzo dobre, gdyż masa protonu - najlżejszego jądra - jest 1836 razy większa od masy elektronu.

Przypomnijmy, że odrwotność masy zredukowanej układu jądro-elektron jest sumą odwrotności mas jądra i elektronu

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e}.$$

Skąd wynika, że $m \approx m_e$.

Przybliżenie to jest bardzo dobre, gdyż masa protonu - najlżejszego jądra - jest 1836 razy większa od masy elektronu.

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.

Równanie ruchu względnego

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.

Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V\left(r\right) u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie H jest jednocząstkowym operatorem Hamiltona

Równanie ruchu względnego

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie H jest jednocząstkowym operatorem Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

Równanie ruchu względnego

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie H jest jednocząstkowym operatorem Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

Równanie ruchu względnego

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie H jest jednocząstkowym operatorem Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}.$$

Równanie ruchu względnego

Od tej pory będziemy się zajmować wyłącznie równaniem Schrödingera dla ruchu względnego

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie pominęliśmy indeks $\vec{r}$ w operatorze ∇^2.
Równanie to determinuje poziomy energetyczne atomu wodoru.
Zauważmy, że ma ono postać równania własnego

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r}),$$

gdzie H jest jednocząstkowym operatorem Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}.$$

Symetria sferyczna

Jak pokazaliśmy wcześniej, wykorzystując symetrię sferyczną energii potencjalnej $V(r)$ możemy dokonać podstawienia

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

i rozseparować równanie Schrödingera dla ruchu względnego na część radialną

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right]R = 0.$$

Jak pokazaliśmy wcześniej, wykorzystując symetrię sferyczną energii potencjalnej $V(r)$ możemy dokonać podstawienia

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

i rozseparować równanie Schrödingera dla ruchu względnego na część radialną

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\;(E - V\,(r)) - \frac{\lambda}{r^2}\right] R = 0.$$

i część kątową

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \lambda\;Y.$$

Symetria sferyczna

Jak pokazaliśmy wcześniej, wykorzystując symetrię sferyczną energii potencjalnej $V(r)$ możemy dokonać podstawienia

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

i rozseparować równanie Schrödingera dla ruchu względnego na część radialną

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,\left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right] R = 0.$$

i część kątową

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \lambda\, Y.$$

Fizycznie dopuszczalne rozwiązania części kątowej istnieją dla $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Są to harmoniki sferyczne

$$Y(\theta, \varphi) \equiv Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Fizycznie dopuszczalne rozwiązania części kątowej istnieją dla $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Są to harmoniki sferyczne

$$Y(\theta,\varphi) \equiv Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

które są funkcjami własnymi operatora orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$ i $m = 0, \pm1, \ldots, \pm l$.

Fizycznie dopuszczalne rozwiązania części kątowej istnieją dla $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Są to harmoniki sferyczne

$$Y(\theta, \varphi) \equiv Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

które są funkcjami własnymi operatora orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, ...$ i $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$.

Część radialna równania Schrödingera

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$$

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} =$$

Część radialna równania Schrödingera

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,\left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) =$$

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{\chi' r - \chi}{r^2}$$

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{\chi' r - \chi}{r^2}$$

otrzymamy równanie

Część radialna równania Schrödingera

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{\chi' r - \chi}{r^2}$$

otrzymamy równanie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right)$$

Część radialna równania Schrödingera

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{\chi' r - \chi}{r^2}$$

otrzymamy równanie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Części radialna równania Schrödingera dla atomu wodoru ma dla $\lambda = l(l+1)$ postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\;(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0.$$

Podstawiając

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{\chi' r - \chi}{r^2}$$

otrzymamy równanie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\;(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right)$$

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right)\ + \frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$,

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$, wówczas dostaniemy równanie

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$, wówczas dostaniemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}$$

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right)\ + \frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$, wówczas dostaniemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi =$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r-\chi\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\,\left(E-V\left(r\right)\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r}=0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r+\chi'-\chi'\right)\;+\frac{2m}{\hbar^2}\,\left(E-V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r}-\frac{l(l+1)\chi}{r^3}=0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$, wówczas dostaniemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\left[V(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi=E\chi.$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykonując różniczkowanie w równaniu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\chi' r - \chi\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\chi}{r} = 0.$$

otrzymamy

$$\frac{1}{r^2}\left(\chi'' r + \chi' - \chi'\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E - V\left(r\right)\right)\frac{\chi}{r} - \frac{l(l+1)\chi}{r^3} = 0.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez $\left(-\frac{\hbar^2 r}{2m}\right)$, wówczas dostaniemy równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi = E\chi.$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi = E\chi.$$

ma postać jednowymiarowego bezczasowego równania Schrödingera dla cząstki w polu o energii potencjalnej

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}+\left[V(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi=E\chi.$$

ma postać jednowymiarowego bezczasowego równania Schrödingera dla cząstki w polu o energii potencjalnej

$$V(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}.$$

Pokażemy, że dodatkowy wyraz w energii potencjalnej jest związany z ruchem obrotowym elektronu wokół jądra.

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi = E\chi.$$

ma postać jednowymiarowego bezczasowego równania Schrödingera dla cząstki w polu o energii potencjalnej

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}.$$

Pokażemy, że dodatkowy wyraz w energii potencjalnej jest związany z ruchem obrotowym elektronu wokół jądra.

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.},$$

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp$$

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp = rmv$$

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp = rmv = rm\omega r$$

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp = rmv = rm\omega r = m\omega r^2$$

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp = rmv = rm\omega r = m\omega r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{L}{mr^2}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Ponieważ elektron znajduje się w polu siły centralnej, to jego orbitalny moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{const.},$$

gdzie $\vec{r}$ mierzymy od *centrum* siły.
Elektron porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$, więc

$$L = rp = rmv = rm\omega r = m\omega r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{L}{mr^2}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r =$$

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r =$$

Część radialna równania Schrödingera

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\omega = \frac{L}{mr^2}$.

Część radialna równania Schrödingera

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\omega = \frac{L}{mr^2}$.

Siła i energia wiążą się wzorem

$$F_d = \frac{L^2}{mr^3}$$

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\omega = \frac{L}{mr^2}$.
Siła i energia wiążą się wzorem

$$F_d = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\mathrm{d}V_d}{\mathrm{d}r}$$

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\omega = \frac{L}{mr^2}$.
Siła i energia wiążą się wzorem

$$F_d = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\mathrm{d}V_d}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \quad V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Na ciało poruszające się po okręgu działa siła dośrodkowa

$$F_d = m\omega^2 r = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r = \frac{L^2}{mr^3},$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\omega = \frac{L}{mr^2}$.
Siła i energia wiążą się wzorem

$$F_d = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\mathrm{d}V_d}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \quad V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Wartość własna kwadratu operatora orbitalnego momentu pędu jest równa $l(l+1)\hbar^2$.

W takim razie

$$V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$$

Część radialna równania Schrödingera

Wartość własna kwadratu operatora orbitalnego momentu pędu jest równa $l(l+1)\hbar^2$.
W takim razie

$$V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2},$$

Część radialna równania Schrödingera

Wartość własna kwadratu operatora orbitalnego momentu pędu jest równa $l(l+1)\hbar^2$.
W takim razie

$$V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2},$$

a więc dodatkowy wyraz we wzorze

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

jest rzeczywiście związany z ruchem obrotowym elektronu wokół jądra.

Część radialna równania Schrödingera

Wartość własna kwadratu operatora orbitalnego momentu pędu jest równa $l(l+1)\hbar^2$.
W takim razie

$$V_d(r) = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2},$$

a więc dodatkowy wyraz we wzorze

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

jest rzeczywiście związany z ruchem obrotowym elektronu wokół jądra.

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(E-V(r))-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)$$

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \text{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{Ze^2}{r}R$$

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{Ze^2}{r}R+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R=$$

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r}\qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{Ze^2}{r}R+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R=ER.$$

Część radialna równania Schrödingera

Wróćmy do części radialnej równania Schrödingera opisującego ruch elektronu w polu kulombowskim jądra

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\;(E-V(r))-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$ i podstawmy

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r}\qquad \mathrm{i} \qquad \lambda=l(l+1),$$

wówczas dostaniemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\;\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{Ze^2}{r}R+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R=ER.$$

Część radialna równania Schrödingera

Za Schrödingerem przyjmiemy, że dla stanu związanego $E < 0$, czyli energia kinetyczna elektronu jest mniejsza od modułu jego energii potencjalnej.

Część radialna równania Schrödingera

Za Schrödingerem przyjmiemy, że dla stanu związanego $E < 0$, czyli energia kinetyczna elektronu jest mniejsza od modułu jego energii potencjalnej.

Energia potencjalna jest ujemna, gdyż mierzymy ją względem energii potencjalnej przy $r \to \infty$, a ta wynosi 0.

Za Schrödingerem przyjmiemy, że dla stanu związanego $E < 0$, czyli energia kinetyczna elektronu jest mniejsza od modułu jego energii potencjalnej.

Energia potencjalna jest ujemna, gdyż mierzymy ją względem energii potencjalnej przy $r \to \infty$, a ta wynosi 0.

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r$$

Część radialna równania Schrödingera

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha}$$

Część radialna równania Schrödingera

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} =$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} =$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

Część radialna równania Schrödingera

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\alpha^2}{\rho^2}\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\alpha^2}{\rho^2}\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{Ze^2\alpha}{\rho}R$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\alpha^2}{\rho^2}\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{Ze^2\alpha}{\rho}R + \frac{l(l+1)\hbar^2\alpha^2}{2m\rho^2}R =$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\alpha^2}{\rho^2}\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{Ze^2\alpha}{\rho}R + \frac{l(l+1)\hbar^2\alpha^2}{2m\rho^2}R = ER.$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową ρ

$$\rho = \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}.$$

Równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

przybiera wtedy postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\alpha^2}{\rho^2}\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \frac{Ze^2\alpha}{\rho}R + \frac{l(l+1)\hbar^2\alpha^2}{2m\rho^2}R = ER.$$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}$$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho} + \frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R = 0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} = -\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{8m|E|}{\hbar^2}$$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

oraz oznaczmy $\lambda\equiv\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

oraz oznaczmy $\lambda\equiv\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}=\frac{2Ze^2m\hbar}{\hbar^2\sqrt{8m|E|}}$

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

oraz oznaczmy $\lambda\equiv\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}=\frac{2Ze^2m\hbar}{\hbar^2\sqrt{8m|E|}}=\frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$, Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

oraz oznaczmy $\lambda\equiv\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}=\frac{2Ze^2m\hbar}{\hbar^2\sqrt{8m|E|}}=\frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$, wtedy otrzymamy równanie

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Mnożąc obie strony równania przez $\left(-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}\right)$ otrzymamy

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}\,\frac{1}{\rho}+\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Wybierzmy stałą α tak, aby

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{2m|E|}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\alpha^2=\frac{8m|E|}{\hbar^2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}$$

oraz oznaczmy $\lambda\equiv\frac{2Ze^2m}{\hbar^2\alpha}=\frac{2Ze^2m\hbar}{\hbar^2\sqrt{8m|E|}}=\frac{Ze^2}{\hbar}\,\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$, wtedy otrzymamy równanie

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0.$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm \frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} =$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} =$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = n\rho^{n-1}e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

$$\longrightarrow$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1}e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\ &\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm \frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\ &\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2}$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} &=
\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$.
Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm \frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n \right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\ &\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\ \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left[n(n-1)\rho^{n-2} \pm \frac{1}{2} n\rho^{n-1} \right] e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1}e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left[n(n-1)\rho^{n-2} \pm \frac{1}{2}n\rho^{n-1}\right] e^{\pm\frac{1}{2}\rho}
\end{aligned}$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1}e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left[n(n-1)\rho^{n-2} \pm \frac{1}{2}n\rho^{n-1}\right] e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&+ \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho}
\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left[n(n-1)\rho^{n-2} \pm \frac{1}{2}n\rho^{n-1}\right] e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&+ \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \to \frac{1}{4}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}.
\end{aligned}$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne tego równania przy $\rho \to \infty$. Przyjmijmy

$$R(\rho) = \rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}$$

i obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= n\rho^{n-1}e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \pm \frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&\to \pm\frac{1}{2}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left[n(n-1)\rho^{n-2} \pm \frac{1}{2}n\rho^{n-1}\right] e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \\
&+ \left(n\rho^{n-1} \pm \frac{1}{2}\rho^n\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} \quad \to \quad \frac{1}{4}\rho^n e^{\pm\frac{1}{2}\rho}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrazy wiodące przy $\rho \to \infty$ w równaniu

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R = 0$$

kasują się.

Część radialna równania Schrödingera

Zauważmy, że wyrazy wiodące przy $\rho \to \infty$ w równaniu

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R = 0$$

kasują się. Rzeczywiście

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{1}{4}R$$

Część radialna równania Schrödingera

Zauważmy, że wyrazy wiodące przy $\rho \to \infty$ w równaniu

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R = 0$$

kasują się. Rzeczywiście

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{1}{4}R \quad \to \left(\frac{1}{4}\rho^n - \frac{1}{4}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Zauważmy, że wyrazy wiodące przy $\rho \to \infty$ w równaniu

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

kasują się. Rzeczywiście

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}-\frac{1}{4}R \quad \to \left(\frac{1}{4}\rho^n-\frac{1}{4}\rho^n\right)e^{\pm\frac{1}{2}\rho}=0.$$

To kasowanie zachodzi dzięki naszemu wyborowi α

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}=-\frac{1}{4}.$$

Zauważmy, że wyrazy wiodące przy $\rho \to \infty$ w równaniu

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R = 0$$

kasują się. Rzeczywiście

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{1}{4}R \quad \to \left(\frac{1}{4}\rho^n - \frac{1}{4}\rho^n\right) e^{\pm\frac{1}{2}\rho} = 0.$$

To kasowanie zachodzi dzięki naszemu wyborowi α

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} = -\frac{1}{4}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.

Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.

Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ.

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho) e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho) e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} =$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}, \\ \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho},\\ \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left(F'' - \frac{1}{2}F'\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} + \left(F' - \frac{1}{2}F\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}, \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left(F'' - \frac{1}{2}F'\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} + \left(F' - \frac{1}{2}F\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \\
&=
\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= \left(F' - \frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}, \\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left(F'' - \frac{1}{2}F'\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} + \left(F' - \frac{1}{2}F\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \\
&= \left(F'' - F' + \frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}.
\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Rozwiązanie z dodatnim wykładnikiem eksponenty musimy odrzucić, gdyż fizycznie dopuszczalne są tylko funkcje falowe znikające w nieskończoności.
Dlatego będziemy szukać rozwiązania równania radialnego w postaci iloczynu

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie $F(\rho)$ jest wielomianem w zmiennej ρ. Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} &= \left(F' - \frac{1}{2}F\right) e^{-\frac{1}{2}\rho}, \\
\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} &= \left(F'' - \frac{1}{2}F'\right) e^{-\frac{1}{2}\rho} + \left(F' - \frac{1}{2}F\right)\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}\rho} \\
&= \left(F'' - F' + \frac{1}{4}F\right) e^{-\frac{1}{2}\rho}.
\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad +$$

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad + \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}$$

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R = 0$$

wówczas dostaniemy

$$\left(F'' - F' + \frac{1}{4}F\right) e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad + \quad \frac{2}{\rho}\left(F' - \frac{1}{2}F\right) e^{-\frac{1}{2}\rho}$$

$$+$$

Część radialna równania Schrödingera

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i pomnożeniu przez $e^{+\frac{1}{2}\rho}$ otrzymamy

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i pomnożeniu przez $e^{+\frac{1}{2}\rho}$ otrzymamy

$$F''$$

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i pomnożeniu przez $e^{+\frac{1}{2}\rho}$ otrzymamy

$$F''+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)F'$$

Część radialna równania Schrödingera

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i pomnożeniu przez $e^{+\frac{1}{2}\rho}$ otrzymamy

$$F''+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)F'+\left[\frac{\lambda-1}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]F=0.$$

Wstawmy je do naszego równania

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R=0$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned}\left(F''-F'+\frac{1}{4}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad &+ \quad \frac{2}{\rho}\left(F'-\frac{1}{2}F\right)e^{-\frac{1}{2}\rho}\\ &+ \quad \left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]Fe^{-\frac{1}{2}\rho}=0,\end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i pomnożeniu przez $e^{+\frac{1}{2}\rho}$ otrzymamy

$$F''+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)F'+\left[\frac{\lambda-1}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]F=0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots \right)$$

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots \right) \equiv \rho^s L(\rho),$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \ \ s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \ \ s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$F'$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$F' =$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$F' = s\rho^{s-1}L + \rho^s L',$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$F' = s\rho^{s-1}L + \rho^s L',$$

$$F''$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ...\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ...\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ...\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

Część radialna równania Schrödingera

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \ \ s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L''$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad +$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \ \ s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}
F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\
F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\
&= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'',
\end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$

$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \quad s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L \quad =$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L \quad =$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L \quad = \quad 0.$$

Będziemy poszukiwać wielomianu $F(\rho)$ postaci

$$F(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\right) \equiv \rho^s L(\rho), \quad \text{gdzie} \quad a_0 \neq 0, \;\; s \geqslant 0.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} F' &= s\rho^{s-1}L + \rho^s L', \\ F'' &= s(s-1)\rho^{s-2}L + s\rho^{s-1}L' + s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \\ &= s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'', \end{aligned}$$

i wstawmy do naszego równania

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L \quad = \quad 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L'$$

$$
\begin{aligned}
s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad &+ \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) \\
&+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.
\end{aligned}
$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$
s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L''
$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' \quad +$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho}-1\right)\left(s\rho^{s-1}L+\rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda-1}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' + \left(\frac{2}{\rho}-1\right)\left(s\rho L+\rho^2 L'\right)$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right)$$
$$+$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda-1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right) + \left[\frac{\lambda-1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie

Część radialna równania Schrödingera

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$\rho^2 L''$

Część radialna równania Schrödingera

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right]L'$$

Część radialna równania Schrödingera

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right) + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right]L' + \left[\rho(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)\right]L = 0.$$

$$s(s-1)\rho^{s-2}L + 2s\rho^{s-1}L' + \rho^s L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho^{s-1}L + \rho^s L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^s L = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez ρ^{-s+2} dostaniemy

$$s(s-1)L + 2s\rho L' + \rho^2 L'' \quad + \quad \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\left(s\rho L + \rho^2 L'\right)$$
$$+ \quad \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]\rho^2 L = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right]L' + \left[\rho\left(\lambda - 1 - s\right) + s(s+1) - l(l+1)\right]L = 0.$$

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\, L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\, L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\,L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\,L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$[s(s+1) - l(l+1)]\,L(0) = 0,$$

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right] L' + \left[\rho\left(\lambda - 1 - s\right) + s(s+1) - l(l+1)\right] L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$\left[s(s+1) - l(l+1)\right] L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\,L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\,L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$[s(s+1) - l(l+1)]\,L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right] L' + \left[\rho\left(\lambda - 1 - s\right) + s(s+1) - l(l+1)\right] L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$\left[s(s+1) - l(l+1)\right] L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s = l^2 + l.$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\,L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\,L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$[s(s+1) - l(l+1)]\,L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s = l^2 + l.$$

Dodajmy do obu stron $\frac{1}{4}$

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(s+1) - \rho\right] L' + \left[\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)\right] L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$\left[s(s+1) - l(l+1)\right] L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s = l^2 + l.$$

Dodajmy do obu stron $\frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow$

$$s^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} s + \frac{1}{4} = l^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{4}$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\,L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\,L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$[s(s+1) - l(l+1)]\,L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0$, dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s = l^2 + l.$$

Dodajmy do obu stron $\frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow$

$$s^2 + 2\cdot\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = l^2 + 2\cdot\frac{1}{2}l + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(s+1) - \rho]\,L' + [\rho\,(\lambda - 1 - s) + s(s+1) - l(l+1)]\,L = 0$$

dla $\rho = 0$ daje

$$[s(s+1) - l(l+1)]\,L(0) = 0,$$

ale $L(0) = a_0 \neq 0,$ dlatego musi zachodzić

$$s(s+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s = l^2 + l.$$

Dodajmy do obu stron $\frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow$

$$s^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} s + \frac{1}{4} = l^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$$

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right)$$

Część radialna równania Schrödingera

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l$$

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Część radialna równania Schrödingera

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$.

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$.
Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$.
Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(l+1) - \rho\right] L' + \rho\left(\lambda - 1 - l\right) L = 0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s+\frac{1}{2}=\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad s=l\quad\text{lub}\quad s=-l-1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1}\to\infty$, dla $\rho\to 0$.
Dlatego $s=l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L''+\rho\,[2(l+1)-\rho]\,L'+\rho\,(\lambda-1-l)\,L=0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

$$\rho L''$$

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$. Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L'' + \rho \left[2(l+1) - \rho \right] L' + \rho \left(\lambda - 1 - l \right) L = 0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho \right] L'$$

Część radialna równania Schrödingera

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$. Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L'' + \rho\left[2(l+1) - \rho\right] L' + \rho\left(\lambda - 1 - l\right) L = 0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho\right] L' + \left(\lambda - 1 - l\right) L =$$

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$.
Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(l+1) - \rho]\,L' + \rho\,(\lambda - 1 - l)\,L = 0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\,L' + (\lambda - 1 - l)\,L = 0.$$

Część radialna równania Schrödingera

Pierwiastkując obustronnie otrzymamy

$$s + \frac{1}{2} = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad s = l \quad \text{lub} \quad s = -l - 1.$$

Drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż $\rho^{-l-1} \to \infty$, dla $\rho \to 0$.
Dlatego $s = l$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$\rho^2 L'' + \rho\,[2(l+1) - \rho]\,L' + \rho\,(\lambda - 1 - l)\,L = 0,$$

a po przedzieleniu przez ρ otrzymamy

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\,L' + (\lambda - 1 - l)\,L = 0.$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

L

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$L =$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$L = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots,$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$L = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots,$$

$$L'$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &=
\end{aligned}
$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_\nu\rho^\nu + ..., \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + ... + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + ..., \end{aligned}$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\ L'' & \end{aligned}$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots,\\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots,\\
L'' &=
\end{aligned}
$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\
L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

Część radialna równania Schrödingera

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\
L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

w równaniu

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho\right] L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_\nu\rho^\nu + ..., \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + ... + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + ..., \\ L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + ... + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + ... \end{aligned}$$

w równaniu

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho\right] L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu \rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\
L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

w równaniu

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$(\nu+1)\nu a_{\nu+1}$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_\nu\rho^\nu + ..., \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + ... + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + ..., \\ L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + ... + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + ... \end{aligned}$$

w równaniu

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1}$

Część radialna równania Schrödingera

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu \rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\ L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots \end{aligned}$$

w równaniu

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho\right] L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_\nu\rho^\nu + ..., \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + ... + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + ..., \\ L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + ... + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + ... \end{aligned}$$

w równaniu

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu + (\lambda - 1 - l)a_\nu =$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_\nu\rho^\nu + ..., \\ L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + ... + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + ..., \\ L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + ... + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + ... \end{aligned}$$

w równaniu

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu + (\lambda - 1 - l)a_\nu = 0,$$

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu \rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\
L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

w równaniu

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu + (\lambda - 1 - l)a_\nu = 0,$$

gdyż współczynniki przy wszystkich potęgach ρ muszą znikać.

Wykorzystajmy jawną postać wielomianu $L(\rho)$

$$
\begin{aligned}
L &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_\nu\rho^\nu + \ldots, \\
L' &= a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots + \nu a_\nu\rho^{\nu-1} + (\nu+1)a_{\nu+1}\rho^\nu + \ldots, \\
L'' &= 2a_2 + 6a_3\rho + \ldots + \nu(\nu-1)a_\nu\rho^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1}\rho^{\nu-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

w równaniu

$$\rho L'' + \left[2(l+1) - \rho\right] L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0.$$

Współczynnik przy potędze ρ^ν w tym równaniu jest równy

$$(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu + (\lambda - 1 - l)a_\nu = 0,$$

gdyż współczynniki przy wszystkich potęgach ρ muszą znikać.

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)]\, a_{\nu+1}$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)]\, a_{\nu+1} \quad =$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)]\, a_{\nu+1} \quad = \quad [\nu - (\lambda - 1 - l)]\, a_\nu,$$

Część radialna równania Schrödingera

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)]\, a_{\nu+1} \quad = \quad [\nu - (\lambda - 1 - l)]\, a_\nu,$$

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)]\, a_{\nu+1} = [\nu - (\lambda - 1 - l)]\, a_\nu,$$

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} =$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned}\left[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)\right] a_{\nu+1} &= \left[\nu - (\lambda - 1 - l)\right] a_\nu, \\ \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{\nu + l + 1 - \lambda}{(\nu+1)(\nu+2l+2)}.\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} \left[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)\right] a_{\nu+1} &= \left[\nu - (\lambda - 1 - l)\right] a_\nu, \\ \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{\nu + l + 1 - \lambda}{(\nu+1)(\nu+2l+2)}. \end{aligned}$$

Dla $\nu \to \infty$ otrzymamy

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu},$$

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned} \left[(\nu+1)\nu + 2(l+1)(\nu+1)\right] a_{\nu+1} &= \left[\nu - (\lambda - 1 - l)\right] a_\nu, \\ \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{\nu + l + 1 - \lambda}{(\nu+1)(\nu+2l+2)}. \end{aligned}$$

Dla $\nu \to \infty$ otrzymamy

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu},$$

a to jest niedopuszczalne, gdyż w taki sposób zachowują się np. współczynniki rozwinięcia funkcji e^ρ.

Część radialna równania Schrödingera

W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny dla współczynników a_ν wielomianu $L(\rho)$

$$\begin{aligned}\left[(\nu+1)\nu+2(l+1)(\nu+1)\right]a_{\nu+1} &= \left[\nu-(\lambda-1-l)\right]a_\nu,\\ \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{\nu+l+1-\lambda}{(\nu+1)(\nu+2l+2)}.\end{aligned}$$

Dla $\nu \to \infty$ otrzymamy

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu},$$

a to jest niedopuszczalne, gdyż w taki sposób zachowują się np. współczynniki rozwinięcia funkcji e^ρ.

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} =$$

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

Część radialna równania Schrödingera

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} =$$

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} =$$

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} =$$

Rzeczywiście

$$e^\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^\rho \Big|_{\rho=0} \rho^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^\nu,$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1} \quad \to \quad \frac{1}{\nu}.$$

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\nu}.$$

W takim razie szereg występujący w definicji $L(\rho)$ musi być skończony.

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\nu}.$$

W takim razie szereg występujący w definicji $L(\rho)$ musi być skończony.

$$L(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + ... + a_{n'}\rho^{n'},$$

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\nu}.$$

W takim razie szereg występujący w definicji $L(\rho)$ musi być skończony.

$$L(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n'}\rho^{n'},$$

gdzie najwyższą potęgę oznaczyliśmy przez n'.

Rzeczywiście

$$e^{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\rho}\Big|_{\rho=0} \rho^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \rho^{\nu},$$

a więc

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\nu}.$$

W takim razie szereg występujący w definicji $L(\rho)$ musi być skończony.

$$L(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n'}\rho^{n'},$$

gdzie najwyższą potęgę oznaczyliśmy przez n'.

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n' + 1)(n' + 2l + 2)} = 0$$

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n' + 1)(n' + 2l + 2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową,

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową, a n' nazywamy radialną liczbą kwantową.

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową, a n' nazywamy radialną liczbą kwantową.

Zauważmy, że skoro $l, n' = 0, 1, 2, ...,$

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową, a n' nazywamy radialną liczbą kwantową.
Zauważmy, że skoro $l, n' = 0, 1, 2, ...,$ to dopuszczalnymi wartościami głównej liczby kwantowej są

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n'+1)(n'+2l+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową, a n' nazywamy radialną liczbą kwantową.
Zauważmy, że skoro $l, n' = 0, 1, 2, \ldots$, to dopuszczalnymi wartościami głównej liczby kwantowej są

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Część radialna równania Schrödingera

Wszystkie współczynniki przy wyższych potęgach muszą znikać. W szczególności $a_{n'+1} = 0$, a więc

$$\frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} = \frac{n' + l + 1 - \lambda}{(n' + 1)(n' + 2l + 2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n' + l + 1 - \lambda = 0.$$

Otrzymaliśmy następujący warunek

$$\lambda = n' + l + 1 \equiv n.$$

n nazywamy główną liczbą kwantową, a n' nazywamy radialną liczbą kwantową.
Zauważmy, że skoro $l, n' = 0, 1, 2, ...$, to dopuszczalnymi wartościami głównej liczby kwantowej są

$$n = 1, 2, 3, ...$$

Część radialna równania Schrödingera

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$,

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Część radialna równania Schrödingera

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n$$

Część radialna równania Schrödingera

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n \qquad \Rightarrow$$

Część radialna równania Schrödingera

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = \frac{Z^2e^4}{\hbar^2}\,\frac{m}{2|E|}$$

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = \frac{Z^2e^4}{\hbar^2}\,\frac{m}{2|E|}$$

$$\Rightarrow$$

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n-1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n \quad \Rightarrow \quad n^2 = \frac{Z^2e^4}{\hbar^2}\frac{m}{2|E|}$$

$$\Rightarrow \quad |E| = -E = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Ze związku

$$\lambda = n = n' + l + 1$$

wynika, że maksymalną możliwą wartością liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu w atomie wodoru jest $n - 1$, więc

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Przypomnijmy, że wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2|E|}} = n \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = \frac{Z^2 e^4}{\hbar^2} \frac{m}{2|E|}$$

$$\Rightarrow \qquad |E| = -E = \frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

Dozwolone poziomy energii

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dozwolone poziomy energii

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taki sam wzór otrzymaliśmy w modelu Bohra.

Dozwolone poziomy energii

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taki sam wzór otrzymaliśmy w modelu Bohra.
Widzimy, że atom wodoru ma nieskończenie wiele dozwolonych poziomów energetycznych,

Dozwolone poziomy energii

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taki sam wzór otrzymaliśmy w modelu Bohra.
Widzimy, że atom wodoru ma nieskończenie wiele dozwolonych poziomów energetycznych, poczynając od stanu podstawowego, dla $n = 1$

$$E_1 = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2},$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taki sam wzór otrzymaliśmy w modelu Bohra.
Widzimy, że atom wodoru ma nieskończenie wiele dozwolonych poziomów energetycznych, poczynając od stanu podstawowego, dla $n = 1$

$$E_1 = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2},$$

a kończąc na $E = 0$ dla $n \to \infty$.

Dozwolone poziomy energii

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na dozwolone energie (poziomy energetyczne) atomu wodoru

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taki sam wzór otrzymaliśmy w modelu Bohra.
Widzimy, że atom wodoru ma nieskończenie wiele dozwolonych poziomów energetycznych, poczynając od stanu podstawowego, dla $n = 1$

$$E_1 = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2},$$

a kończąc na $E = 0$ dla $n \to \infty$.

Dozwolone poziomy energii

Jest to konsekwencja faktu, że potencjał Coulomba zachowuje się jak

$$\sim \frac{1}{r}.$$

Liczba n przyjmuje wartości naturalne tylko dzięki przyjętemu założeniu, że

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} = -\frac{1}{4}.$$

Jest to konsekwencja faktu, że potencjał Coulomba zachowuje się jak

$$\sim \frac{1}{r}.$$

Liczba n przyjmuje wartości naturalne tylko dzięki przyjętemu założeniu, że

$$\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} = -\frac{1}{4}.$$

Część radialna równania Schrödingera

Równanie

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0$$

dla $\lambda = n$ ma postać

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (n - 1 - l)\, L = 0$$

Równanie

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0$$

dla $\lambda = n$ ma postać

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (n - 1 - l)\, L = 0$$

Zadanie. Pokazać, że rozwiązaniem tego równania są tzw. stowarzyszone wielomiany Laguerre'a, które wyrażają się wzorem

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\, \rho^k.$$

Równanie

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (\lambda - 1 - l)\, L = 0$$

dla $\lambda = n$ ma postać

$$\rho L'' + [2(l+1) - \rho]\, L' + (n - 1 - l)\, L = 0$$

Zadanie. Pokazać, że rozwiązaniem tego równania są tzw. stowarzyszone wielomiany Laguerre'a, które wyrażają się wzorem

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\, \rho^k.$$

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho}$$

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r,$$

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar},$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.

W takim razie

$$\rho =$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.
W takim razie

$$\rho = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 n} r =$$

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.
W takim razie

$$\rho = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 n}\, r = \frac{2Z}{na_0}\, r,$$

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.
W takim razie

$$\rho = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 n}\, r = \frac{2Z}{na_0}\, r, \qquad \text{gdzie} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Część radialna równania Schrödingera

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.
W takim razie

$$\rho = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 n}\, r = \frac{2Z}{na_0}\, r, \qquad \text{gdzie} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

jest promieniem Bohra.

Zbierzmy w całość rozwiązanie równania radialnego

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho} = \rho^s L(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho},$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\rho = \alpha r, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{8m|E_n|}}{\hbar}, \qquad E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

i pokazaliśmy, że $s = l$.
W takim razie

$$\rho = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 n}\, r = \frac{2Z}{na_0}\, r, \qquad \text{gdzie} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

jest promieniem Bohra.

Ostatecznie część radialna funkcji falowej dana jest wzorem

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha r} (\alpha r)^l L_{n+l}^{2l+1}(\alpha r),$$

a pełna unormowana funkcja falowa atomu wodoru ma postać

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\ Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

gdzie $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ to harmoniki sferyczne.

Część radialna równania Schrödingera

Ostatecznie część radialna funkcji falowej dana jest wzorem

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha r} (\alpha r)^l L_{n+l}^{2l+1}(\alpha r),$$

a pełna unormowana funkcja falowa atomu wodoru ma postać

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\; Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

gdzie $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ to harmoniki sferyczne.
Główna liczba kwantowa n, od której zależą poziomy energetyczne atomu, może przyjmować wartości

$$n = 1, 2, 3, ...,$$

Część radialna równania Schrödingera

Ostatecznie część radialna funkcji falowej dana jest wzorem

$$R_{nl}(r) = -\left\{ \left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\,[(n+l)!]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha r} \, (\alpha r)^l \, L_{n+l}^{2l+1}(\alpha r),$$

a pełna unormowana funkcja falowa atomu wodoru ma postać

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\; Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

gdzie $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ to harmoniki sferyczne.
Główna liczba kwantowa n, od której zależą poziomy energetyczne atomu, może przyjmować wartości

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi),$$

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi), \qquad u_{210}(\vec{r}) = R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi).$$

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi), \qquad u_{210}(\vec{r}) = R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi).$$

Harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ obliczyliśmy już wcześniej.

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi), \qquad u_{210}(\vec{r}) = R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi).$$

Harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ obliczyliśmy już wcześniej. Teraz musimy znaleźć funkcje radialne $R_{20}(r)$ i $R_{21}(r)$.

a liczba kwantowa orbitalnego momentu pędu l i magnetyczna liczba kwantowa m zmieniają się w zakresie

$$l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l.$$

Obliczmy przykładowo funkcje $u_{200}(\vec{r})$ i $u_{210}(\vec{r})$.

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi), \qquad u_{210}(\vec{r}) = R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi).$$

Harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ obliczyliśmy już wcześniej. Teraz musimy znaleźć funkcje radialne $R_{20}(r)$ i $R_{21}(r)$.

Funkcje falowe atomu wodoru

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$=$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$R_{nl}(r) = -\left\{ \left(\frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{ \left(\frac{2Z}{2a_0} \right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2 \cdot 2\left[(2+0)!\right]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= \quad -\left\{ \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 \frac{1}{4 \cdot 2^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho)$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{1}{4\cdot 2^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho),$$

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= \quad -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{1}{4\cdot 2^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho),$$

$$R_{21}(r) = -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{0!}{4\left[3!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho)$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{1}{4\cdot 2^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho),$$

$$R_{21}(r) = -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{0!}{4\left[3!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho)$$

$$=$$

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{1}{4\cdot 2^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho),$$

$$R_{21}(r) = -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{0!}{4\left[3!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho)$$

$$= -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho).$$

$$R_{nl}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

$$R_{20}(r) = -\left\{\left(\frac{2Z}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-0-1)!}{2\cdot 2\left[(2+0)!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^0 L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$= \quad -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{1}{4\cdot 2^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_2^1(\rho) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho),$$

$$R_{21}(r) = -\left\{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \frac{0!}{4\left[3!\right]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho)$$

$$= \quad -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho).$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k.$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \, \rho^k .$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \, \rho^k .$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) \quad =$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) \quad = \quad \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \rho^k =$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho,$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \rho^k = -4 + \frac{4}{2} \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho)$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\, \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\, \rho^k = -4 + \frac{4}{2}\, \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) =$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k =$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \, \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \, \rho^k = -4 + \frac{4}{2} \, \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!} \, \rho^k = -6,$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \rho^k = -4 + \frac{4}{2} \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!} \rho^k = -6,$$

$R_{20}(r)$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \rho^k = -4 + \frac{4}{2} \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!} \rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) =$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho)$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\,(2-\rho)\,,$$

$$
\begin{aligned}
L_{n+l}^{2l+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k. \\
L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho, \\
L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k = -6,
\end{aligned}
$$

$$
R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\,(2-\rho)\,,
$$

$R_{21}(r)$

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k .$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!} \rho^k = -4 + \frac{4}{2} \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!} \rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} (2-\rho) ,$$

$$R_{21}(r) =$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$
\begin{aligned}
L_{n+l}^{2l+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k. \\
L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4 + \frac{4}{2}\,\rho, \\
L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) &= \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k = -6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{20}(r) &= -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\,(2-\rho)\,, \\
R_{21}(r) &= -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) =
\end{aligned}
$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\, \rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} \frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\, \rho^k = -4 + \frac{4}{2}\, \rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{k+3} \frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\, \rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \left(2-\rho\right),$$

$$R_{21}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho.$$

Funkcje falowe atomu wodoru

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1}(-1)^{k+2l+1}\frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}\,\rho^k.$$

$$L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{1}(-1)^{k+1}\frac{4}{(1-k)!(1+k)!k!}\,\rho^k = -4+\frac{4}{2}\,\rho,$$

$$L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{0}(-1)^{k+3}\frac{36}{(0-k)!(3+k)!k!}\,\rho^k = -6,$$

$$R_{20}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\rho}L_{2+0}^{2\cdot 0+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho}\left(2-\rho\right),$$

$$R_{21}(r) = -\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{6\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho L_{2+1}^{2\cdot 1+1}(\rho) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho.$$

Funkcje falowe atomu wodoru

Zadanie. Znaleźć radialne funkcje falowe $R_{nl}(r)$ atomu wodoru dla $n = 1$ i $n = 3$.

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) \quad =$$

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\, Y_{00}(\theta, \varphi) =$$

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) \;=\; R_{20}(r)\; Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) \quad = \quad R_{20}(r)\; Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

$u_{210}(\vec{r})$

Funkcje falowe atomu wodoru

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) = R_{20}(r)\, Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

$$u_{210}(\vec{r}) =$$

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) \quad = \quad R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

$$u_{210}(\vec{r}) \quad = \quad R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi) =$$

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta,\varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$u_{200}(\vec{r}) \;=\; R_{20}(r)\; Y_{00}(\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

$$u_{210}(\vec{r}) \;=\; R_{21}(r)\; Y_{10}(\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z}{a_0} r \cos\theta\, e^{-\frac{Z}{2a_0} r},$$

Funkcje falowe atomu wodoru

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} u_{200}(\vec{r}) &= R_{20}(r)\, Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r}, \\ u_{210}(\vec{r}) &= R_{21}(r)\, Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z}{a_0} r \cos\theta\, e^{-\frac{Z}{2a_0} r}, \end{aligned}$$

gdzie a_0 jest promieniem orbity Bohra, a Z liczbą protonów w jądrze.

Uwzględniając, że $\rho = \frac{Z}{a_0} r$, a harmoniki sferyczne $Y_{00}(\theta, \varphi)$ i $Y_{10}(\theta, \varphi)$ dane są wzorami

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} u_{200}(\vec{r}) &= R_{20}(r)\ Y_{00}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) e^{-\frac{Z}{2a_0} r}, \\ u_{210}(\vec{r}) &= R_{21}(r)\ Y_{10}(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z}{a_0} r \cos\theta\, e^{-\frac{Z}{2a_0} r}, \end{aligned}$$

gdzie a_0 jest promieniem orbity Bohra, a Z liczbą protonów w jądrze.

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1$$

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)$$

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2}\, n$$

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2} \, n = n^2$$

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2}\, n = n^2$$

funkcji własnych.

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2}\, n = n^2$$

funkcji własnych. Czyli n-ty poziom energetyczny atomu wodoru jest n^2-krotnie zdegenerowany.

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2}\, n = n^2$$

funkcji własnych. Czyli n-ty poziom energetyczny atomu wodoru jest n^2-krotnie zdegenerowany.

Degeneracja jest dwukrotnie większa, jeśli uwzględnimy spin elektronu.

Degeneracja poziomów energii

Ponieważ harmoniki sferyczne są ortogonalne, to dozwolonej energii atomu

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

odpowiada

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 2(n-1) + 1}{2}\, n = n^2$$

funkcji własnych. Czyli n-ty poziom energetyczny atomu wodoru jest n^2-krotnie zdegenerowany.
Degeneracja jest dwukrotnie większa, jeśli uwzględnimy spin elektronu.

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2},$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zastanówmy się, dlaczego elektron nie spada na jądro, tak jak miałoby to miejsce w przypadku klasycznym?

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zastanówmy się, dlaczego elektron nie spada na jądro, tak jak miałoby to miejsce w przypadku klasycznym?

Dozwolone stany kwantowe atomu wodoru są stanami stacjonarnymi

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\ Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zastanówmy się, dlaczego elektron nie spada na jądro, tak jak miałoby to miejsce w przypadku klasycznym?
Dozwolone stany kwantowe atomu wodoru są stanami stacjonarnymi

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\ Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

a więc niezależnymi od czasu.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Przy użyciu stałej Rydberga, $R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$, dozwolone energie atomu wodoru o $Z = 1$ możemy zapisać w formie

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zastanówmy się, dlaczego elektron nie spada na jądro, tak jak miałoby to miejsce w przypadku klasycznym?
Dozwolone stany kwantowe atomu wodoru są stanami stacjonarnymi

$$u_{nlm}(\vec{r}) = u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\ Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

a więc niezależnymi od czasu.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Nawet, jeśli uwzględnimy zależność od czasu pełnej funkcji falowej atomu wodoru wynikającą z czasowego równania Schrödingera, to ma ona prostą postać

$$\psi_{nlm}(\vec{r}, t) = u_{nlm}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}.$$

Rozkład gęstości ładunku elektronu w atomie otrzymamy mnożąc gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie przez jego ładunek

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\, |\psi_{nlm}(\vec{r}, t)|^2$$

Nawet, jeśli uwzględnimy zależność od czasu pełnej funkcji falowej atomu wodoru wynikającą z czasowego równania Schrödingera, to ma ona prostą postać

$$\psi_{nlm}(\vec{r}, t) = u_{nlm}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}.$$

Rozkład gęstości ładunku elektronu w atomie otrzymamy mnożąc gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie przez jego ładunek

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\, |\psi_{nlm}(\vec{r}, t)|^2 = -e\, |u_{nlm}(\vec{r})|^2$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Nawet, jeśli uwzględnimy zależność od czasu pełnej funkcji falowej atomu wodoru wynikającą z czasowego równania Schrödingera, to ma ona prostą postać

$$\psi_{nlm}(\vec{r}, t) = u_{nlm}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}.$$

Rozkład gęstości ładunku elektronu w atomie otrzymamy mnożąc gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie przez jego ładunek

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \left|\psi_{nlm}(\vec{r}, t)\right|^2 = -e \left|u_{nlm}(\vec{r})\right|^2 = \rho(\vec{r}).$$

Nawet, jeśli uwzględnimy zależność od czasu pełnej funkcji falowej atomu wodoru wynikającą z czasowego równania Schrödingera, to ma ona prostą postać

$$\psi_{nlm}(\vec{r}, t) = u_{nlm}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}.$$

Rozkład gęstości ładunku elektronu w atomie otrzymamy mnożąc gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie przez jego ładunek

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\left|\psi_{nlm}(\vec{r}, t)\right|^2 = -e\left|u_{nlm}(\vec{r})\right|^2 = \rho(\vec{r}).$$

Widzimy, że jest ona niezależna od czasu.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Nawet, jeśli uwzględnimy zależność od czasu pełnej funkcji falowej atomu wodoru wynikającą z czasowego równania Schrödingera, to ma ona prostą postać

$$\psi_{nlm}(\vec{r}, t) = u_{nlm}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}.$$

Rozkład gęstości ładunku elektronu w atomie otrzymamy mnożąc gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie przez jego ładunek

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\, |\psi_{nlm}(\vec{r}, t)|^2 = -e\, |u_{nlm}(\vec{r})|^2 = \rho(\vec{r}).$$

Widzimy, że jest ona niezależna od czasu.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Niepokoić może fakt, że w wyższych stanach energetycznych o $n = 2, 3, \ldots$ elektron może mieć niezerowy orbitalny moment pędu równy $l\hbar$, co mogłoby się wiązać z emisją promieniowania hamowania.

Obliczmy jednak wartość oczekiwaną wektora położenia elektronu w atomie w stanie stacjonarnym.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Niepokoić może fakt, że w wyższych stanach energetycznych o $n = 2, 3, \ldots$ elektron może mieć niezerowy orbitalny moment pędu równy $l\hbar$, co mogłoby się wiązać z emisją promieniowania hamowania.
Obliczmy jednak wartość oczekiwaną wektora położenia elektronu w atomie w stanie stacjonarnym.

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle nlm | \vec{r} | nlm \rangle$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Niepokoić może fakt, że w wyższych stanach energetycznych o $n = 2, 3, \ldots$ elektron może mieć niezerowy orbitalny moment pędu równy $l\hbar$, co mogłoby się wiązać z emisją promieniowania hamowania.
Obliczmy jednak wartość oczekiwaną wektora położenia elektronu w atomie w stanie stacjonarnym.

$$\langle\vec{r}\rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm\rangle = \int \vec{r}\,|u_{nlm}(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r,$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Niepokoić może fakt, że w wyższych stanach energetycznych o $n = 2, 3, \ldots$ elektron może mieć niezerowy orbitalny moment pędu równy $l\hbar$, co mogłoby się wiązać z emisją promieniowania hamowania.
Obliczmy jednak wartość oczekiwaną wektora położenia elektronu w atomie w stanie stacjonarnym.

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle nlm | \vec{r} | nlm \rangle = \int \vec{r} \, |u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r,$$

gdzie całkujemy po obszarze symetrycznym względem początku układu współrzędnych.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Niepokoić może fakt, że w wyższych stanach energetycznych o $n = 2, 3, \ldots$ elektron może mieć niezerowy orbitalny moment pędu równy $l\hbar$, co mogłoby się wiązać z emisją promieniowania hamowania.

Obliczmy jednak wartość oczekiwaną wektora położenia elektronu w atomie w stanie stacjonarnym.

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle nlm | \vec{r} | nlm \rangle = \int \vec{r} \, |u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r,$$

gdzie całkujemy po obszarze symetrycznym względem początku układu współrzędnych.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Pokazaliśmy, że sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, a co za tym idzie również pełne funkcje falowe atomu $u_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ są funkcjami o określonej parzystości.

Przypomnijmy, że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi,

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Pokazaliśmy, że sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, a co za tym idzie również pełne funkcje falowe atomu $u_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ są funkcjami o określonej parzystości.
Przypomnijmy, że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.

Pokazaliśmy, że sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, a co za tym idzie również pełne funkcje falowe atomu $u_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ są funkcjami o określonej parzystości.
Przypomnijmy, że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.
Tak samo jest dla funkcji

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Pokazaliśmy, że sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, a co za tym idzie również pełne funkcje falowe atomu $u_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ są funkcjami o określonej parzystości.
Przypomnijmy, że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.
Tak samo jest dla funkcji

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

gdyż długość wektora $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy odbiciu przestrzennym $\vec{r} \to -\vec{r}$.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Pokazaliśmy, że sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, a co za tym idzie również pełne funkcje falowe atomu $u_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ są funkcjami o określonej parzystości.
Przypomnijmy, że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.
Tak samo jest dla funkcji

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

gdyż długość wektora $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy odbiciu przestrzennym $\vec{r} \to -\vec{r}$.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Kwadrat modułu funkcji falowej $u_{nlm}(\vec{r})$ jest oczywiście funkcją parzystą, gdyż

$$|u_{nlm}(-\vec{r})|^2 = |\pm u_{nlm}(\vec{r})|^2 = |u_{nlm}(\vec{r})|^2 .$$

W takim razie funkcja podcałkowa $\vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2$ we wzorze

$$\langle\vec{r}\rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm\rangle = \int \vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r$$

Kwadrat modułu funkcji falowej $u_{nlm}(\vec{r})$ jest oczywiście funkcją parzystą, gdyż

$$|u_{nlm}(-\vec{r})|^2 = |\pm u_{nlm}(\vec{r})|^2 = |u_{nlm}(\vec{r})|^2 .$$

W takim razie funkcja podcałkowa $\vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2$ we wzorze

$$\langle\vec{r}\rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm\rangle = \int \vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r = 0$$

jest nieparzysta,

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Kwadrat modułu funkcji falowej $u_{nlm}(\vec{r})$ jest oczywiście funkcją parzystą, gdyż

$$|u_{nlm}(-\vec{r})|^2 = |\pm u_{nlm}(\vec{r})|^2 = |u_{nlm}(\vec{r})|^2 .$$

W takim razie funkcja podcałkowa $\vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2$ we wzorze

$$\langle\vec{r}\rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm\rangle = \int \vec{r}|u_{nlm}(\vec{r})|^2 \,\mathrm{d}^3 r = 0$$

jest nieparzysta, a całka po obszarze symetrycznym względem początku układu współrzędnych znika.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Kwadrat modułu funkcji falowej $u_{nlm}(\vec{r})$ jest oczywiście funkcją parzystą, gdyż

$$|u_{nlm}(-\vec{r})|^2 = |\pm u_{nlm}(\vec{r})|^2 = |u_{nlm}(\vec{r})|^2 \,.$$

W takim razie funkcja podcałkowa $\vec{r}\,|u_{nlm}(\vec{r})|^2$ we wzorze

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm \rangle = \int \vec{r}\,|u_{nlm}(\vec{r})|^2 \,\mathrm{d}^3 r = 0$$

jest nieparzysta, a całka po obszarze symetrycznym względem początku układu współrzędnych znika.

Fakt ten oznacza, że elektron w stanie stacjonarnym średnio znajduje się w jądrze, co sprawia, że uśrednione pole promieniowania znika.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Kwadrat modułu funkcji falowej $u_{nlm}(\vec{r})$ jest oczywiście funkcją parzystą, gdyż

$$|u_{nlm}(-\vec{r})|^2 = |\pm u_{nlm}(\vec{r})|^2 = |u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, .$$

W takim razie funkcja podcałkowa $\vec{r}\,|u_{nlm}(\vec{r})|^2$ we wzorze

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle nlm|\vec{r}|nlm \rangle = \int \vec{r}\,|u_{nlm}(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 r = 0$$

jest nieparzysta, a całka po obszarze symetrycznym względem początku układu współrzędnych znika.
Fakt ten oznacza, że elektron w stanie stacjonarnym średnio znajduje się w jądrze, co sprawia, że uśrednione pole promieniowania znika.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?

Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?

Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.

Takie przejście może być np. spowodowane zderzeniem z innym atomem w gazie,

Przejścia pomiędzy poziomami energii

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?

Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.

Takie przejście może być np. spowodowane zderzeniem z innym atomem w gazie, zderzeniem z innym elektronem w rurze wyładowań,

Przejścia pomiędzy poziomami energii

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?
Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.
Takie przejście może być np. spowodowane zderzeniem z innym atomem w gazie, zderzeniem z innym elektronem w rurze wyładowań, czy z fotonem pochodzącym z zewnątrz.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?

Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.

Takie przejście może być np. spowodowane zderzeniem z innym atomem w gazie, zderzeniem z innym elektronem w rurze wyładowań, czy z fotonem pochodzącym z zewnątrz.

Załóżmy, że w chwili początkowej atom znajduje się w stanie stacjonarnym $|\psi_n\rangle$,

$$|\psi_n\rangle = |nlm\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \equiv |n\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t},$$

W jaki sposób atom promieniuje przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi, które są przecież trwałe?
Foton jest wypromieniowywany, gdy atom przechodzi ze stanu o energii wyższej do stanu o energii niższej.
Takie przejście może być np. spowodowane zderzeniem z innym atomem w gazie, zderzeniem z innym elektronem w rurze wyładowań, czy z fotonem pochodzącym z zewnątrz.
Załóżmy, że w chwili początkowej atom znajduje się w stanie stacjonarnym $|\psi_n\rangle$,

$$|\psi_n\rangle = |nlm\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \equiv |n\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t},$$

a w chwili końcowej w stanie stacjonarnym $|\psi_{n'}\rangle$,

$$|\psi_{n'}\rangle = |n'l'm'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n'}t} \equiv |n'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n'}t},$$

przy czym $E_n > E_{n'}$.

a w chwili końcowej w stanie stacjonarnym $|\psi_{n'}\rangle$,

$$|\psi_{n'}\rangle = |n'l'm'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n'}t} \equiv |n'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n'}t},$$

przy czym $E_n > E_{n'}$.

W czasie pośrednim stan atomu $|\psi\rangle$ będzie superpozycją stanów

$$|\psi\rangle = a\,|\psi_n\rangle + b\,|\psi_{n'}\rangle\,, \quad \text{gdzie} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

a w chwili końcowej w stanie stacjonarnym $|\psi_{n'}\rangle$,

$$|\psi_{n'}\rangle = |n' l' m'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \equiv |n'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t},$$

przy czym $E_n > E_{n'}$.
W czasie pośrednim stan atomu $|\psi\rangle$ będzie superpozycją stanów

$$|\psi\rangle = a\,|\psi_n\rangle + b\,|\psi_{n'}\rangle\,, \quad \text{gdzie} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Zadanie. Pokazać, że współczynniki *a* i *b* muszą spełniać podany warunek normalizacyjny.

a w chwili końcowej w stanie stacjonarnym $|\psi_{n'}\rangle$,

$$|\psi_{n'}\rangle = |n' l' m'\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \equiv |n'\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t},$$

przy czym $E_n > E_{n'}$.
W czasie pośrednim stan atomu $|\psi\rangle$ będzie superpozycją stanów

$$|\psi\rangle = a \, |\psi_n\rangle + b \, |\psi_{n'}\rangle \,, \quad \text{gdzie} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Zadanie. Pokazać, że współczynniki *a* i *b* muszą spełniać podany warunek normalizacyjny.

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{r}\rangle &= \langle\psi|\vec{r}|\psi\rangle = \left(a^* \langle\psi_n| + b^* \langle\psi_{n'}|\right) \vec{r} \left(a |\psi_n\rangle + b |\psi_{n'}\rangle\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} |\right) \vec{r} \left(a |\psi_n\rangle + b |\psi_{n'}\rangle\right) \\
&= \left(a^* \langle n | e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} + b^* \langle n' | e^{\frac{i}{\hbar}E_{n'} t}\right) \vec{r} \left(a |n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} + b |n'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n'} t}\right)
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a \, | \psi_n \rangle + b \, | \psi_{n'} \rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a \, | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b \, | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a \, | \psi_n \rangle + b \, | \psi_{n'} \rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a \, | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b \, | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a | \psi_n \rangle + b | \psi_{n'} \rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a \, |\psi_n\rangle + b \, |\psi_{n'}\rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a \, |n\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b \, |n'\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle \\
&\quad + a^* b \, \langle n | \vec{r} | n' \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} + b^* a \, \langle n' | \vec{r} | n \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{n'} - E_n)t}.
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a \, | \psi_n \rangle + b \, | \psi_{n'} \rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a \, | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b \, | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle \\
&\quad + a^* b \, \langle n | \vec{r} | n' \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n'}) t} + b^* a \, \langle n' | \vec{r} | n \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar} (E_{n'} - E_n) t}.
\end{aligned}
$$

Dwa pierwsze wyrazy w kolorze czarnym znikają, gdyż wartość oczekiwana wektora położenia elektronu w stanach stacjonarnych jest równa 0.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} |\right) \vec{r} \left(a | \psi_n \rangle + b | \psi_{n'} \rangle\right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t}\right) \vec{r} \left(a | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t}\right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle \\
&\quad + a^* b \langle n | \vec{r} | n' \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'}) t} + b^* a \langle n' | \vec{r} | n \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{n'} - E_n) t}.
\end{aligned}
$$

Dwa pierwsze wyrazy w kolorze czarnym znikają, gdyż wartość oczekiwana wektora położenia elektronu w stanach stacjonarnych jest równa 0.

Czwarty wyraz jest sprzężeniem zespolonym trzeciego.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia elektronu w czasie przejścia na niższy poziom energetyczny.

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r} \rangle &= \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left(a^* \langle \psi_n | + b^* \langle \psi_{n'} | \right) \vec{r} \left(a \, | \psi_n \rangle + b \, | \psi_{n'} \rangle \right) \\
&= \left(a^* \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} + b^* \langle n' | \, e^{\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \vec{r} \left(a \, | n \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} + b \, | n' \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} \right) \\
&= |a|^2 \langle n | \vec{r} | n \rangle + |b|^2 \langle n' | \vec{r} | n' \rangle \\
&\quad + a^* b \, \langle n | \vec{r} | n' \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} + b^* a \, \langle n' | \vec{r} | n \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{n'} - E_n)t}.
\end{aligned}
$$

Dwa pierwsze wyrazy w kolorze czarnym znikają, gdyż wartość oczekiwana wektora położenia elektronu w stanach stacjonarnych jest równa 0.

Czwarty wyraz jest sprzężeniem zespolonym trzeciego.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right),$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n | \vec{r} | n' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n | \vec{r} | n' \rangle a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zapiszmy

$$a^* b \langle n | \vec{r} | n' \rangle = \left| a^* b \langle n | \vec{r} | n' \rangle \right| e^{i\delta}$$

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle\vec{r}(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \left\langle n|\vec{r}|n'\right\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\left\langle n|\vec{r}|n'\right\rangle a^* b e^{i\omega_{nn'}t}\right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zapiszmy

$$a^* b \left\langle n|\vec{r}|n'\right\rangle = \left|a^* b \left\langle n|\vec{r}|n'\right\rangle\right| e^{i\delta} \equiv |\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta}$$

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle a^* b e^{i\omega_{nn'}t} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zapiszmy

$$a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle = \left| a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle \right| e^{i\delta} \equiv |\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta}$$

gdzie δ jest niezależną od czasu fazą,

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zapiszmy

$$a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle = \left| a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle \right| e^{i\delta} \equiv |\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta}$$

gdzie δ jest niezależną od czasu fazą, a $\vec{r}_{nn'}(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, wolnozmienną w porównaniu z okresem oscylacji

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Zależne od czasu wyrazy w wartości oczekiwanej położenia elektronu mają zatem postać

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle \, a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy częstość Bohra

$$E_n - E_{n'} \equiv \hbar\omega_{nn'}.$$

Zapiszmy

$$a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle = \left| a^* b \langle n|\vec{r}|n' \rangle \right| e^{i\delta} \equiv |\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta}$$

gdzie δ jest niezależną od czasu fazą, a $\vec{r}_{nn'}(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, wolnozmienną w porównaniu z okresem oscylacji

Przejścia pomiędzy poziomami energii

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.

Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right)$$

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta} e^{i\omega_{nn'} t} \right)$$

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$\langle\vec{r}(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n'\rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'}t}\right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta} e^{i\omega_{nn'}t}\right)$$

$$=$$

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{r}(t)\rangle &= 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n'\rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'}t}\right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta} e^{i\omega_{nn'}t}\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i(\omega_{nn'}t+\delta)}\right)
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{r}(t)\rangle &= 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n'\rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'}t}\right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)|e^{i\delta}e^{i\omega_{nn'}t}\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)|e^{i(\omega_{nn'}t+\delta)}\right) = 2|\vec{r}_{nn'}(t)|\cos(\omega_{nn'}t+\delta).
\end{aligned}
$$

Przejścia pomiędzy poziomami energii

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r}(t) \rangle &= 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle\, a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta} e^{i\omega_{nn'} t} \right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i(\omega_{nn'} t + \delta)} \right) = 2|\vec{r}_{nn'}(t)| \cos(\omega_{nn'} t + \delta).
\end{aligned}
$$

Przy przejściu pomiędzy poziomami średnie położenie elektronu oscyluje z częstością Bohra i dlatego wypromieniowuje on foton o takiej samej częstości.

z częstością $\omega_{nn'}$; $|\vec{r}_{nn'}(t)|$ oznacza długość wektora $\vec{r}_{nn'}(t)$.
Typowy czas w jakim zachodzi przejście atomowe jest rzędu 10^{-8} s.
Natomiast typowa częstość emitowanego promieniowania jest rzędu $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.
Wtedy

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{r}(t) \rangle &= 2\mathrm{Re}\left(\langle n|\vec{r}|n' \rangle \, a^* b e^{i\omega_{nn'} t} \right) = 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i\delta} e^{i\omega_{nn'} t} \right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(|\vec{r}_{nn'}(t)| e^{i(\omega_{nn'} t + \delta)} \right) = 2|\vec{r}_{nn'}(t)| \cos(\omega_{nn'} t + \delta).
\end{aligned}
$$

Przy przejściu pomiędzy poziomami średnie położenie elektronu oscyluje z częstością Bohra i dlatego wypromieniowuje on foton o takiej samej częstości.

Zarówno przed przejściem na inny poziom jak i po nim, elektron jest w stanie stacjonarnym, w którym nie promieniuje.

Przejścia pomiędzy stanami stacjonarnymi w atomie wodoru ilustruje następujący diagram.

Przejścia pomiędzy poziomami energii

Zarówno przed przejściem na inny poziom jak i po nim, elektron jest w stanie stacjonarnym, w którym nie promieniuje.
Przejścia pomiędzy stanami stacjonarnymi w atomie wodoru ilustruje następujący diagram.

Przejścia pomiędzy poziomami energii