Separacja równania Schrödingera we współrzędnych sferycznych

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

23 kwietnia 2024

Sferycznie symetryczna energia potencjalna

Stacjonarny układ kwantowomechaniczny jest opisywany przez bezczasowe równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(\vec{r})\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Załóżmy, że energia potencjalna jest sferycznie symetryczna, tzn.

$$V(\vec{r}) \equiv V(r), \qquad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|.$$

Sferycznie symetryczna energia potencjalna

Stacjonarny układ kwantowomechaniczny jest opisywany przez bezczasowe równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V(\vec{r})\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Załóżmy, że energia potencjalna jest sferycznie symetryczna, tzn.

$$V(\vec{r}) \equiv V(r)\,, \qquad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|\,.$$

Tego rodzaju energię potencjalną ma cząstka naładowana znajdująca się w polu kulombowskim.

Sferycznie symetryczna energia potencjalna

Stacjonarny układ kwantowomechaniczny jest opisywany przez bezczasowe równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(\vec{r})\, u(\vec{r}) = E u(\vec{r}).$$

Załóżmy, że energia potencjalna jest sferycznie symetryczna, tzn.

$$V(\vec{r}) \equiv V(r), \qquad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|\,.$$

Tego rodzaju energię potencjalną ma cząstka naładowana znajdująca się w polu kulombowskim.

Np. w jonie wodoropodobnym, którego jądro ma ładunek $+Ze$, energia potencjalna elektronu o ładunku $-e$ ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

Sferycznie symetryczna energia potencjalna

Np. w jonie wodoropodobnym, którego jądro ma ładunek $+Ze$, energia potencjalna elektronu o ładunku $-e$ ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

w układzie jednostek, w którym współczynnik $k = 1$.

Sferycznie symetryczna energia potencjalna

Np. w jonie wodoropodobnym, którego jądro ma ładunek $+Ze$, energia potencjalna elektronu o ładunku $-e$ ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

w układzie jednostek, w którym współczynnik $k = 1$.

Na razie jednak nie będziemy zakładać żadnej konkretnej postaci energii potencjalnej $V(r)$, przyjmiemy tylko, że jest ona niezmiennicza ze względu na obroty, albo inaczej, że jest ona sferycznie symetryczna, gdyż długość wektora $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy dowolnym obrocie układu współrzędnych lub rozpatrywaneego układu fizycznego.

Np. w jonie wodoropodobnym, którego jądro ma ładunek $+Ze$, energia potencjalna elektronu o ładunku $-e$ ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

w układzie jednostek, w którym współczynnik $k = 1$.
Na razie jednak nie będziemy zakładać żadnej konkretnej postaci energii potencjalnej $V(r)$, przyjmiemy tylko, że jest ona niezmiennicza ze względu na obroty, albo inaczej, że jest ona sferycznie symetryczna, gdyż długość wektora $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy dowolnym obrocie układu współrzędnych lub rozpatrywaneego układu fizycznego.
Taka energia potencjalna prowadzi do siły centralnej, czyli siły skierowanej do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Np. w jonie wodoropodobnym, którego jądro ma ładunek $+Ze$, energia potencjalna elektronu o ładunku $-e$ ma postać:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

w układzie jednostek, w którym współczynik $k = 1$.
Na razie jednak nie będziemy zakładać żadnej konkretnej postaci energii potencjalnej $V(r)$, przyjmiemy tylko, że jest ona niezmiennicza ze względu na obroty, albo inaczej, że jest ona sferycznie symetryczna, gdyż długość wektora $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy dowolnym obrocie układu współrzędnych lub rozpatrywaneego układu fizycznego.
Taka energia potencjalna prowadzi do siły centralnej, czyli siły skierowanej do określonego punktu, tzw. centrum siły.

W przypadku stacjonarnym siłę centralną $F(\vec{r})$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f(\vec{r})$ jest dowolną funkcją skalarną.

Pamiętamy, że pomiędzy siłą a energią potencjalną zachodzi uniwersalny związek $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$, dlatego w przypadku siły centralnej otrzymamy

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

a zatem widzimy, że $f(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

W przypadku stacjonarnym siłę centralną $F(\vec{r})$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}) = f\,(\vec{r})\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f\,(\vec{r})$ jest dowolną funkcją skalarną.
Pamiętamy, że pomiędzy siłą a energią potencjalną zachodzi uniwersalny związek $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$, dlatego w przypadku siły centralnej otrzymamy

$$\vec{F}\,(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

a zatem widzimy, że $f(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f\left(\vec{r}, t\right) \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r}, t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\,(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\,(\vec{r},t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} =$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) =$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} =$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\left(\vec{r},t\right)$$

$=$

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}\right) \end{aligned}$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r}\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{0} \end{aligned}$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0\end{aligned}$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f(\vec{r},t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r},t) \\
&= \vec{r} \times \left(f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f(\vec{r},t)}{r}\,\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.}
\end{aligned}$$

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej, niekoniecznie stacjonarnej, dla której

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $f\left(\vec{r},t\right)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} =$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i =$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p} \right)_i =$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k =$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik} x_j x_i p_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$.

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} x_j x_i p_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k =$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik} x_j x_i p_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik} x_j x_i p_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} x_j x_i p_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$.

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i =$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) =$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\frac{x_k}{r}\right).$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\,\frac{x_k}{r}\right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\frac{x_k}{r}\right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i =$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\,\frac{x_k}{r}\right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\frac{x_k}{r}\right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r},t) = f(r,t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r},t)\,\frac{x_k}{r}\right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}\left(\vec{r}, t\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f\left(\vec{r}, t\right)}{r} \right) x_k =$$

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

$$=$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

$$= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = 0.$$

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)x_k = \varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\right]_j x_k$$
$$= \left[\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\times\vec{r}\right]_i = 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\sim\vec{r}.$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r}\right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r}\right)\right]_j x_k$$
$$= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r}\right) \times \vec{r}\right]_i = 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r}\right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r}, t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r}, t) = f(r, t).$$

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) \right]_j x_k$$
$$= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r},t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r},t) = f(r,t).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r},t) = V(r,t).$$

Ruch ciała pod wpływem siły centralnej.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

$$= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r}, t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r}, t) = f(r, t).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r}, t) = V(r, t).$$

Symetria sferyczna

Bezczasowe równanie Schrödingera ma wówczas postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\, u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Zauważmy, że jest to równanie własne operatora Hamiltona H

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

danego wzorem

Symetria sferyczna

Bezczasowe równanie Schrödingera ma wówczas postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V\,(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Zauważmy, że jest to równanie własne operatora Hamiltona H

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

danego wzorem

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V\,(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r).$$

Bezczasowe równanie Schrödingera ma wówczas postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V\left(r\right) u(\vec{r}) = E u(\vec{r}).$$

Zauważmy, że jest to równanie własne operatora Hamiltona H

$$H u(\vec{r}) = E u(\vec{r})$$

danego wzorem

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V\left(r\right) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r).$$

Zauważmy, że pierwszy wyraz w operatorze Hamiltona, reprezentujący energię kinetyczną cząstki, ma również symetrię obrotową.

Symetria sferyczna

Bezczasowe równanie Schrödingera ma wówczas postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Zauważmy, że jest to równanie własne operatora Hamiltona H

$$Hu(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

danego wzorem

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r).$$

Zauważmy, że pierwszy wyraz w operatorze Hamiltona, reprezentujący energię kinetyczną cząstki, ma również symetrię obrotową.

Z kursu mechaniki teoretycznej wiemy, że symetria obrotowa układu fizycznego wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu.
Jak pokażemy w dalszej części kursu, kiedy będziemy rozpatrywać symetrie w mechanice kwantowej,

Z kursu mechaniki teoretycznej wiemy, że symetria obrotowa układu fizycznego wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu. Jak pokażemy w dalszej części kursu, kiedy będziemy rozpatrywać symetrie w mechanice kwantowej, układ ma symetrię obrotową, jeśli jego operator hamiltona komutuje z operatorem orbitalnego momentu pędu

Z kursu mechaniki teoretycznej wiemy, że symetria obrotowa układu fizycznego wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu. Jak pokażemy w dalszej części kursu, kiedy będziemy rozpatrywać symetrie w mechanice kwantowej, układ ma symetrię obrotową, jeśli jego operator hamiltona komutuje z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Symetria sferyczna

Z kursu mechaniki teoretycznej wiemy, że symetria obrotowa układu fizycznego wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu. Jak pokażemy w dalszej części kursu, kiedy będziemy rozpatrywać symetrie w mechanice kwantowej, układ ma symetrię obrotową, jeśli jego operator hamiltona komutuje z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Pokażemy, że w tym przypadku rzeczywiście tak jest.

Z kursu mechaniki teoretycznej wiemy, że symetria obrotowa układu fizycznego wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu. Jak pokażemy w dalszej części kursu, kiedy będziemy rozpatrywać symetrie w mechanice kwantowej, układ ma symetrię obrotową, jeśli jego operator hamiltona komutuje z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Pokażemy, że w tym przypadku rzeczywiście tak jest.

W tym celu obliczmy komutator

$$[L_i, H] = \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] =$$

Symetria sferyczna

W tym celu obliczmy komutator

$$[L_i, H] \quad = \quad \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)]$$

W tym celu obliczmy komutator

$$[L_i, H] = \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)]$$

$$=$$

W tym celu obliczmy komutator

$$[L_i, H] = \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)]$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j]\, p_j\Big) + [L_i, V(r)].$$

Symetria sferyczna

W tym celu obliczmy komutator

$$
\begin{aligned}
[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}\left[L_i, p_j p_j\right] + \left[L_i, V(r)\right] \\
&= \frac{1}{2m}\Big(p_j\left[L_i, p_j\right] + \left[L_i, p_j\right] p_j\Big) + \left[L_i, V(r)\right].
\end{aligned}
$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Symetria sferyczna

W tym celu obliczmy komutator

$$\begin{aligned}[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\ &= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j\Big) + [L_i, V(r)].\end{aligned}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$p_j [L_i, p_j] =$$

Symetria sferyczna

W tym celu obliczmy komutator

$$
\begin{aligned}
[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\
&= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j\Big) + [L_i, V(r)].
\end{aligned}
$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$p_j [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k =$$

W tym celu obliczmy komutator

$$\begin{aligned}[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\ &= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j]\, p_j\Big) + [L_i, V(r)].\end{aligned}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$p_j [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ikj} p_k p_j$$

W tym celu obliczmy komutator

$$
\begin{aligned}
[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\
&= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j\Big) + [L_i, V(r)].
\end{aligned}
$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$
\begin{aligned}
p_j [L_i, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ikj} p_k p_j \\
&=
\end{aligned}
$$

W tym celu obliczmy komutator

$$\begin{aligned}[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\ &= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j\Big) + [L_i, V(r)].\end{aligned}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$\begin{aligned}p_j [L_i, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ikj} p_k p_j \\ &= \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k - \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k =\end{aligned}$$

W tym celu obliczmy komutator

$$
\begin{aligned}
[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\
&= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j]\, p_j\Big) + [L_i, V(r)].
\end{aligned}
$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$
\begin{aligned}
p_j [L_i, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ikj} p_k p_j \\
&= \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k - \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0,
\end{aligned}
$$

W tym celu obliczmy komutator

$$
\begin{aligned}
[L_i, H] &= \left[L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_i, p_j p_j] + [L_i, V(r)] \\
&= \frac{1}{2m}\Big(p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j\Big) + [L_i, V(r)].
\end{aligned}
$$

Wcześniej pokazaliśmy, że

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dlatego

$$
\begin{aligned}
p_j [L_i, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ikj} p_k p_j \\
&= \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k - \frac{1}{2} i\hbar\varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.

Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.

Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)]$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)] \quad =$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)] \quad = \quad \varepsilon_{ijk}\, [x_j p_k, V(r)] =$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)] \quad = \quad \varepsilon_{ijk}\,[x_j p_k, V(r)] = \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)]\,,$$

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)] \quad = \quad \varepsilon_{ijk}\, [x_j p_k, V(r)] = \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)]\,,$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $[x_j, V(r)] = 0$.

gdzie najpierw zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$ w drugim wyrazie, a następnie skorzystaliśmy z antysymetrii tensora Levi-Civity, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$, i z relacji komutacji $[p_j, p_k] = 0$.
Zadanie. Postępując tak samo pokazać, że

$$[L_i, p_j]\, p_j = 0.$$

Musimy jeszcze obliczyć komutator $[L_i, V(r)]$.

$$[L_i, V(r)] \quad = \quad \varepsilon_{ijk}\,[x_j p_k, V(r)] = \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)]\,,$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $[x_j, V(r)] = 0$.

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] =$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] =$$

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) =$$

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]f(\vec{r}) = \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k}$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k}$$

$$=$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k}\end{aligned}$$

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &=\end{aligned}$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k} f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k} f(\vec{r}) =
\end{aligned}$$

Symetria sferyczna

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k} f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k} f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}),
\end{aligned}$$

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k}f(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji komutatora i z wzorów na pochodną iloczynu i pochodną funkcji złożonej.

Obliczmy komutator $[p_k, V(r)]$.

$$[p_k, V(r)] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right].$$

Niech $f(\vec{r})$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną, wówczas

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]f(\vec{r}) &= \frac{\partial\left(V(r)f(\vec{r})\right)}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) + V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} - V(r)\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial V(r)}{\partial x_k}f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k}f(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji komutatora i z wzorów na pochodną iloczynu i pochodną funkcji złożonej.

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} =$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right)$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}} \left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j \right)$$

$$=$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}} \left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j \right)$$

$$= \frac{1}{2r} \left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j \right) =$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right)$$

$$= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k =$$

Obliczmy pochodną

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.\end{aligned}$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}} \left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j \right)$$
$$= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.$$

W takim razie

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) =$$

Obliczmy pochodną

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.\end{aligned}$$

W takim razie

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}) =$$

Symetria sferyczna

Obliczmy pochodną

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.\end{aligned}$$

W takim razie

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}) = V'(r)\frac{x_k}{r} f(\vec{r}).$$

Obliczmy pochodną

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right) \\
&= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}) = V'(r)\frac{x_k}{r} f(\vec{r}).
$$

Ponieważ równość ta jest spełniona dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(\vec{r})$, to

Symetria sferyczna

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right)$$
$$= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.$$

W takim razie

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}) = V'(r)\frac{x_k}{r} f(\vec{r}).$$

Ponieważ równość ta jest spełniona dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(\vec{r})$, to

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = V'(r)\frac{x_k}{r}.$$

Obliczmy pochodną

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_j\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(x_j \delta_{jk} + \delta_{jk} x_j\right) = \frac{1}{2r} 2x_k = \frac{x_k}{r}.\end{aligned}$$

W takim razie

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] f(\vec{r}) = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_k} f(\vec{r}) = V'(r)\frac{x_k}{r} f(\vec{r}).$$

Ponieważ równość ta jest spełniona dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f(\vec{r})$, to

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] = V'(r)\frac{x_k}{r}.$$

Wróćmy do komutatora

$$[L_i, V(r)] = \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] =$$

Symetria sferyczna

Wróćmy do komutatora

$$[L_i, V(r)] \quad = \quad \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar\varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]$$

Wróćmy do komutatora

$$[L_i, V(r)] = \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right]$$
$$=$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} =
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&=
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} x_k x_j\right)
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r) \right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} x_k x_j \right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r) \right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} x_k x_j \right) \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_j x_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \right)
\end{aligned}$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} x_k x_j\right) \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Wróćmy do komutatora

$$\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} x_k x_j\right) \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k\right) = 0.
\end{aligned}$$

W ten sposób dowiedliśmy, że

Wróćmy do komutatora

$$\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} x_k x_j\right) \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k\right) = 0.
\end{aligned}$$

W ten sposób dowiedliśmy, że

$$[L_i, H] = 0, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Wróćmy do komutatora

$$
\begin{aligned}
[L_i, V(r)] &= \varepsilon_{ijk} x_j [p_k, V(r)] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, V(r)\right] \\
&= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j V'(r) \frac{x_k}{r} = -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \varepsilon_{ijk} x_j x_k \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} x_k x_j\right) \\
&= -i\hbar \frac{V'(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_j x_k\right) = 0.
\end{aligned}
$$

W ten sposób dowiedliśmy, że

$$
[L_i, H] = 0, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.
$$

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.

Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] =$$

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] =$$

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] = L_i [L_i, H] + [L_i, H] L_i =$$

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] = L_i [L_i, H] + [L_i, H] L_i = 0.$$

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] = L_i [L_i, H] + [L_i, H] L_i = 0.$$

Mimo, że L_1 i L_2 komutują z operatorami H i $\vec{L}^2$, to nie komutują same ze sobą ani z L_3, gdyż $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$.

Symetria sferyczna

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] = L_i [L_i, H] + [L_i, H] L_i = 0.$$

Mimo, że L_1 i L_2 komutują z operatorami H i $\vec{L}^2$, to nie komutują same ze sobą ani z L_3, gdyż $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$.
Dlatego w przypadku symetrii sferycznej funkcje własne operatora Hamiltona H są zarazem funkcjami własnymi operatora $\vec{L}^2$ i jednej ze składowych operatora orbitalnego momentu pędu, za którą umownie przyjmuje się L_3.

Symetria sferyczna

Oczywiście operator Hamiltona H komutuje również z kwadratem operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L}^2$.
Rzeczywiście

$$\left[\vec{L}^2, H\right] = [L_i L_i, H] = L_i [L_i, H] + [L_i, H] L_i = 0.$$

Mimo, że L_1 i L_2 komutują z operatorami H i $\vec{L}^2$, to nie komutują same ze sobą ani z L_3, gdyż $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$.
Dlatego w przypadku symetrii sferycznej funkcje własne operatora Hamiltona H są zarazem funkcjami własnymi operatora $\vec{L}^2$ i jednej ze składowych operatora orbitalnego momentu pędu, za którą umownie przyjmuje się L_3.

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.

Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \\ \end{array} \right.$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\begin{cases} x & = \\ & \\ & \end{cases}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ \end{cases}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\begin{cases} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & & \end{cases}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & = & \\ & & \end{array} \right.$$

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\begin{cases} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ & \end{cases}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & = & r \sin\theta \sin\varphi, \\ z & & \end{array} \right.$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & = & r \sin\theta \sin\varphi, \\ z & = & \end{array} \right.$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.

Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\begin{cases} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & = & r \sin\theta \sin\varphi, \\ z & = & r \cos\theta. \end{cases}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Aby dokonać separacji części radialnej i kątowej w równaniu Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej przetransformujemy operator ∇^2, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

do współrzędnych sferycznych.
Zróżniczkujmy związki transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \sin\theta \cos\varphi, \\ y & = & r \sin\theta \sin\varphi, \\ z & = & r \cos\theta. \end{array} \right.$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta \quad \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &=
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&=
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &=
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&=
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Podsumujmy wyniki

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Aby odwrócić te związki obliczmy kombinację

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial z},\\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z},\\ \frac{\partial}{\partial\varphi} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Aby odwrócić te związki obliczmy kombinację

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = r\sin^2\theta\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)+r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

Podsumujmy wyniki

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Aby odwrócić te związki obliczmy kombinację

$$
r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = r\sin^2\theta\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}
$$

$$
+ r\cos^2\theta\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}
$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Aby odwrócić te związki obliczmy kombinację

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} = r\sin^2\theta\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$
$$+ r\cos^2\theta\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$=$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = r\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned} & \sin\theta \sin\varphi \left(r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ = \quad & \sin\theta \sin\varphi \left(r \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = r\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned} & \sin\theta \sin\varphi \left(r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ = \quad & \sin\theta \sin\varphi \left(r \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
=\;&\sin\theta\sin\varphi\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
+\;&\cos\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned}
& \sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
= \quad & \sin\theta\sin\varphi\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
+ \quad & \cos\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
= \quad &
\end{aligned}$$

$$r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} = r\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned}
& \sin\theta \sin\varphi \left(r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \\
= \quad & \sin\theta \sin\varphi \left(r \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
+ \quad & \cos\varphi \left(-r \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
= \quad & r \sin\theta \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \frac{\partial}{\partial y} =
\end{aligned}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
=&\sin\theta\sin\varphi\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
+&\cos\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
=&r\sin\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\frac{\partial}{\partial y}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obliczmy kombinację

$$\begin{aligned}
& \sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
= \quad & \sin\theta\sin\varphi\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
+ \quad & \cos\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
= \quad & r\sin\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\frac{\partial}{\partial y}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} =$$

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\varphi-1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Otrzymaliśmy równość

$$\sin\theta\sin\varphi\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dzieląc obustronnie przez $r\sin\theta$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Z równania $\frac{\partial}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\varphi-1}{r\sin\theta\sin\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\varphi},\end{aligned}$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\frac{\partial}{\partial r} \quad = \quad \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},$$

$\Rightarrow$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} =$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}.$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \quad &= \quad \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\ \Rightarrow \quad & \quad \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że po prostych obliczeniach otrzymamy

$$\cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\ \Rightarrow \quad & \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że po prostych obliczeniach otrzymamy

$$\cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} =$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z},\\ \Rightarrow \quad & \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że po prostych obliczeniach otrzymamy

$$\cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Skorzystajmy z równania

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \quad &= \quad \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\ \Rightarrow \qquad & \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że po prostych obliczeniach otrzymamy

$$\cos\theta\frac{\partial}{\partial z} = \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

Zadanie. Korzystając z powyższych wzorów pokazać, że

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

Podsumujmy wyniki

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

Zadanie. Korzystając z powyższych wzorów pokazać, że

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&=
\end{aligned}
$$

Podsumujmy wyniki

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

Zadanie. Korzystając z powyższych wzorów pokazać, że

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},
\end{aligned}
$$

Podsumujmy wyniki

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

Zadanie. Korzystając z powyższych wzorów pokazać, że

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},
\end{aligned}
$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x =$$

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_y$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_y =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),
\end{aligned}
$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),
\end{aligned}
$$

L_z

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_z =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) =
\end{aligned}
$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}$$

a kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu wyraża się wzorem:

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

a kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu wyraża się wzorem:

$$\vec{L}^2 =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

a kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu wyraża się wzorem:

$$\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 =$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

a kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu wyraża się wzorem:

$$
\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].
$$

Transformacja do współrzędnych sferycznych

kartezjańskie składowe operatora orbitalnego momentu pędu wyrażają się wzorami:

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

a kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu wyraża się wzorem:

$$
\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].
$$

Zadanie. Pokazać, że trzecia składowa orbitalnego momentu pędu i kąt azymutalny spełniają następującą relację komutacji

$$[\varphi, L_z] = i\hbar.$$

Jaką wobec tego relację nieoznaczoności otrzymamy dla tych wielkości?

Zadanie. Pokazać, że trzecia składowa orbitalnego momentu pędu i kąt azymutalny spełniają następującą relację komutacji

$$[\varphi, L_z] = i\hbar.$$

Jaką wobec tego relację nieoznaczoności otrzymamy dla tych wielkości?

Równanie Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

we współrzędnych sferycznych ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

Równanie Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V\,(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

we współrzędnych sferycznych ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u(\vec{r}) + V\,(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

gdzie $u(\vec{r}) = u(r, \theta, \varphi)$.

R. Schrödingera dla potencjału sferycznego

Równanie Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

we współrzędnych sferycznych ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

gdzie $u(\vec{r}) = u(r,\theta,\varphi)$. Podstawmy

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi),$$

Równanie Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$

we współrzędnych sferycznych ma postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u(\vec{r}) + V(r)\,u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}).$$

gdzie $u(\vec{r}) = u(r,\theta,\varphi)$. Podstawmy

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi),$$

Separacja równania Schrödingera

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\right.$$

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right.$$

Separacja równania Schrödingera

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$+V(r)\,RY=E\,RY,$$

Separacja równania Schrödingera

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$+V(r)\,RY=E\,RY,$$

gdzie w pierwszym wyrazie po lewej stronie równania zastąpiliśmy pochodną cząstkową przez pochodną zwyczajną,

Separacja równania Schrödingera

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + V(r)\,RY = E\,RY,$$

gdzie w pierwszym wyrazie po lewej stronie równania zastąpiliśmy pochodną cząstkową przez pochodną zwyczajną, gdyż funkcja $R(r)$ zależy tylko od zmiennej r.

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + V(r)\,RY = E\,RY,$$

gdzie w pierwszym wyrazie po lewej stronie równania zastąpiliśmy pochodną cząstkową przez pochodną zwyczajną, gdyż funkcja $R(r)$ zależy tylko od zmiennej r.

Dzieląc obie strony przez RY i mnożąc przez r^2 otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + V(r)\,r^2 = E\,r^2.$$

wówczas otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$+V(r)\,RY=E\,RY,$$

gdzie w pierwszym wyrazie po lewej stronie równania zastąpiliśmy pochodną cząstkową przez pochodną zwyczajną, gdyż funkcja $R(r)$ zależy tylko od zmiennej r.
Dzieląc obie strony przez RY i mnożąc przez r^2 otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$+V(r)\,r^2=E\,r^2.$$

Separacja równania Schrödingera

Rozseparujmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$=\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Mnożąc obustronnie przez $\frac{2m}{\hbar^2}$ dostaniemy

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$
$$=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\,\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Rozseparujmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Mnożąc obustronnie przez $\frac{2m}{\hbar^2}$ dostaniemy

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\,\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Lewa strona równania zależy tylko od zmiennych kątowych, a prawa tylko od r.

Rozseparujmy zmienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Mnożąc obustronnie przez $\frac{2m}{\hbar^2}$ dostaniemy

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\,\left[E-V(r)\right]r^2.$$

Lewa strona równania zależy tylko od zmiennych kątowych, a prawa tylko od r.

Dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy λ.

Rozważmy najpierw część radialną.

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)\right]r^2=\lambda.$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy λ.
Rozważmy najpierw część radialną.

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\ \left[E-V\left(r\right)\right]r^2=\lambda.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\frac{R}{r^2}$ wtedy dostaniemy

Separacja równania Schrödingera

Dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy λ.
Rozważmy najpierw część radialną.

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V\left(r\right)\right]r^2=\lambda.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\frac{R}{r^2}$ wtedy dostaniemy

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V\left(r\right)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Dlatego obie strony muszą być równe stałej separacji, którą oznaczymy λ.
Rozważmy najpierw część radialną.

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\ \left[E-V\left(r\right)\right]r^2=\lambda.$$

Pomnóżmy obie strony przez $\frac{R}{r^2}$ wtedy dostaniemy

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\ \left(E-V\left(r\right)\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0.$$

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right.$$

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda\,\hbar^2 Y.$$

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda\,\hbar^2 Y.$$

Przypomnijmy wzór na kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych:

$$\vec{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Rozważmy teraz część kątową.

$$-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\lambda.$$

Mnożąc obie strony przez $\hbar^2 Y$ otrzymamy

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda\,\hbar^2 Y.$$

Przypomnijmy wzór na kwadrat operatora orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych:

$$\vec{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Widzimy, że część kątowa równania Schrödingera w przypadku symetrii sferycznej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda\, \hbar^2 Y(\theta, \varphi).$$

Równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda\, Y = 0$$

możemy dalej rozseparować na część biegunową

Widzimy, że część kątowa równania Schrödingera w przypadku symetrii sferycznej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta,\varphi) = \lambda\,\hbar^2 Y(\theta,\varphi).$$

Równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda\,Y = 0$$

możemy dalej rozseparować na część biegunową i część azymutalną.

Widzimy, że część kątowa równania Schrödingera w przypadku symetrii sferycznej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta,\varphi) = \lambda\, \hbar^2 Y(\theta,\varphi).$$

Równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda\; Y = 0$$

możemy dalej rozseparować na część biegunową i część azymutalną.

W tym celu podstawmy

$$Y(\theta,\varphi) =$$

Widzimy, że część kątowa równania Schrödingera w przypadku symetrii sferycznej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \, \hbar^2 Y(\theta, \varphi).$$

Równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda \ Y = 0$$

możemy dalej rozseparować na część biegunową i część azymutalną.
W tym celu podstawmy

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Separacja równania Schrödingera

Widzimy, że część kątowa równania Schrödingera w przypadku symetrii sferycznej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta,\varphi) = \lambda\, \hbar^2 Y(\theta,\varphi).$$

Równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda\; Y = 0$$

możemy dalej rozseparować na część biegunową i część azymutalną.
W tym celu podstawmy

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Separacja równania Schrödingera

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

Separacja równania Schrödingera

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\ \sin^2\theta=$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\sin^2\theta=0.$$

Wówczas równanie kątowe

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

przyjmie postać

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\Theta\Phi=0.$$

Podzielmy obie strony przez $\Theta\Phi$ i pomnóżmy przez $\sin^2\theta$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\,\sin^2\theta=0.$$

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\ \nu$$

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\ \nu=\mathrm{const.}$$

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\ \nu=\mathrm{const.}$$

Każda ze stron jest funkcją tylko jednej zmiennej kątowej,

Separacja równania Schrödingera

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\ \nu=\mathrm{const.}$$

Każda ze stron jest funkcją tylko jednej zmiennej kątowej, dlatego obie strony muszą być równe stałej, którą oznaczymy ν.

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\ \nu=\mathrm{const.}$$

Każda ze stron jest funkcją tylko jednej zmiennej kątowej, dlatego obie strony muszą być równe stałej, którą oznaczymy ν.

Rozważmy najpierw równanie

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \nu.$$

Mnożąc obie strony przez Φ otrzymamy równanie na część azymutalną funkcji falowej

Rozważmy najpierw równanie

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \nu.$$

Mnożąc obie strony przez Φ otrzymamy równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0.$$

Rozważmy najpierw równanie

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \nu.$$

Mnożąc obie strony przez Φ otrzymamy równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0.$$

Część biegunowa natomiast ma postać

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=\nu,$$

a po przemnożeniu przez Θ i podzieleniu przez $\sin^2\theta$ możemy ją zapisać w formie

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Separacja równania Schrödingera

Część biegunowa natomiast ma postać

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\ \sin^2\theta=\nu,$$

a po przemnożeniu przez Θ i podzieleniu przez $\sin^2\theta$ możemy ją zapisać w formie

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować.

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$,

Separacja równania Schrödingera

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0$$

Separacja równania Schrödingera

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu =$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \left\{ \right.$$

Separacja równania Schrödingera

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \left\{ \begin{array}{l} \quad |\nu|, \\ \\ \end{array} \right.$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \begin{cases} \quad |\nu|, \quad \mathrm{dla} \\ \end{cases}$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \left\{ \quad |\nu|, \quad \mathrm{dla} \quad \nu < 0, \right.$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \left\{ \begin{array}{ll} |\nu|, & \mathrm{dla} \quad \nu < 0, \\ -|\nu|, & \end{array} \right.$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \begin{cases} \quad |\nu|, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ -\,|\nu|, & \text{dla} \end{cases}$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \begin{cases} \quad |\nu|, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ -|\nu|, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

Równanie na część azymutalną funkcji falowej

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0$$

możemy łatwo scałkować. Jeśli $\nu = 0$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.
Jeśli $\nu \neq 0$, to podstawiając $\Phi = e^{\gamma\,\varphi}$ otrzymamy

$$\gamma^2 + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = -\nu = \begin{cases} \quad |\nu|, & \mathrm{dla} \quad \nu < 0, \\ -\,|\nu|, & \mathrm{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \Bigg\{$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi.

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, \\ \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \\ \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0. \end{cases}$$

W takim razie

$$\gamma = \begin{cases} \pm\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \\ \pm i\sqrt{|\nu|}, & \text{dla} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0, \end{cases}$$

gdzie C, D, E i F są stałymi dowolnymi. Obliczmy pochodną

$$\Phi'(\varphi) = \begin{cases} i\sqrt{|\nu|}Ce^{i\sqrt{|\nu|}\varphi} - i\sqrt{|\nu|}De^{-i\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu > 0, \\ \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\varphi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\varphi}, & \text{dla} \quad \nu < 0. \end{cases}$$

Zarówno rozwiązanie $\Phi(\varphi)$, jak i jego pochodna $\Phi'(\varphi)$ muszą być ciągłe w przedziale $[0, 2\pi)$, dlatego musi zachodzić

$$\Phi(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi(\varphi) \quad \text{i} \quad \Phi'(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi'(\varphi).$$

Zarówno rozwiązanie $\Phi(\varphi)$, jak i jego pochodna $\Phi'(\varphi)$ muszą być ciągłe w przedziale $[0, 2\pi)$, dlatego musi zachodzić

$$\Phi(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi(\varphi) \quad \text{i} \quad \Phi'(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi'(\varphi).$$

Dla $\nu < 0$ otrzymujemy stąd warunki

$$\begin{cases} E + F = Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ \sqrt{|\nu|}E - \sqrt{|\nu|}F = \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Separacja równania Schrödingera

Zarówno rozwiązanie $\Phi(\varphi)$, jak i jego pochodna $\Phi'(\varphi)$ muszą być ciągłe w przedziale $[0, 2\pi)$, dlatego musi zachodzić

$$\Phi(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi(\varphi) \quad \text{i} \quad \Phi'(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi'(\varphi).$$

Dla $\nu < 0$ otrzymujemy stąd warunki

$$\begin{cases} E + F &= Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ \sqrt{|\nu|}E - \sqrt{|\nu|}F &= \sqrt{|\nu|}Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - \sqrt{|\nu|}Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Po podzieleniu drugiego równania przez $\sqrt{|\nu|}$ otrzymamy

$$\begin{cases} E + F &= Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ E - F &= Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Zarówno rozwiązanie $\Phi(\varphi)$, jak i jego pochodna $\Phi'(\varphi)$ muszą być ciągłe w przedziale $[0, 2\pi)$, dlatego musi zachodzić

$$\Phi(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi(\varphi) \quad \text{i} \quad \Phi'(0) = \lim_{\varphi \to 2\pi^-} \Phi'(\varphi).$$

Dla $\nu < 0$ otrzymujemy stąd warunki

$$\begin{cases} E + F & = & E e^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + F e^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ \sqrt{|\nu|}E - \sqrt{|\nu|}F & = & \sqrt{|\nu|}E e^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - \sqrt{|\nu|}F e^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Po podzieleniu drugiego równania przez $\sqrt{|\nu|}$ otrzymamy

$$\begin{cases} E + F & = & E e^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + F e^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ E - F & = & E e^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - F e^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Separacja równania Schrödingera

Dodając, a następnie odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymamy sprzeczne warunki

$$\begin{cases} 2E &= 2Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2F &= 2Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dlatego rozwiązanie to musimy odrzucić.

Dodając, a następnie odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymamy sprzeczne warunki

$$\begin{cases} 2E &= 2Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2F &= 2Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dlatego rozwiązanie to musimy odrzucić.

Dla $\nu > 0$ otrzymamy warunki

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ i\sqrt{|\nu|}(C - D) &= i\sqrt{|\nu|}\left(Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}\right), \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymamy sprzeczne warunki

$$\begin{cases} 2E & = & 2Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2F & = & 2Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dlatego rozwiązanie to musimy odrzucić.
Dla $\nu > 0$ otrzymamy warunki

$$\begin{cases} C + D & = & Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ i\sqrt{|\nu|}(C - D) & = & i\sqrt{|\nu|}\left(Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}\right), \end{cases}$$

które po przedzieleniu drugiego równania przez $i\sqrt{|\nu|}$ sprowadzają się do

Dodając, a następnie odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymamy sprzeczne warunki

$$\begin{cases} 2E &= 2Ee^{\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2F &= 2Fe^{-\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dlatego rozwiązanie to musimy odrzucić.
Dla $\nu > 0$ otrzymamy warunki

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ i\sqrt{|\nu|}(C - D) &= i\sqrt{|\nu|}\left(Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}\right), \end{cases}$$

które po przedzieleniu drugiego równania przez $i\sqrt{|\nu|}$ sprowadzają się do

Separacja równania Schrödingera

$$\begin{cases} C + D = Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D = Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= \\ & \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D & \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Separacja równania Schrödingera

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

Separacja równania Schrödingera

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

a więc musi zachodzić $\sqrt{|\nu|} \equiv m$,

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

a więc musi zachodzić $\sqrt{|\nu|} \equiv m$, gdzie m jest liczbą naturalną,

Separacja równania Schrödingera

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

a więc musi zachodzić $\sqrt{|\nu|} \equiv m$, gdzie m jest liczbą naturalną,
gdyż pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

a więc musi zachodzić $\sqrt{|\nu|} \equiv m$, gdzie m jest liczbą naturalną, gdyż pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną i rozpatrujemy przypadek $\nu > 0$.

$$\begin{cases} C + D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} + De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ C - D &= Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} - De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}. \end{cases}$$

Dodając, a następnie odejmując stronami otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2C &= 2Ce^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \\ 2D &= 2De^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \\ e^{-i\sqrt{|\nu|}\cdot 2\pi} = 1, \end{cases}$$

a więc musi zachodzić $\sqrt{|\nu|} \equiv m$, gdzie m jest liczbą naturalną, gdyż pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną i rozpatrujemy przypadek $\nu > 0$.

Separacja równania Schrödingera

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

$$A = A + B \cdot 2\pi$$

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

$$A = A + B \cdot 2\pi \qquad \text{i} \qquad B = B,$$

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

$$A = A + B \cdot 2\pi \qquad \text{i} \qquad B = B,$$

co jest spełnione tylko dla $B = 0$.

Separacja równania Schrödingera

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

$$A = A + B \cdot 2\pi \qquad \text{i} \qquad B = B,$$

co jest spełnione tylko dla $B = 0$. Rozwiązanie ma zatem postać funkcji stałej

$$\Phi(\varphi) = A.$$

Przypomnijmy, że dla $\nu = 0$ rozwiązanie ma postać

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi'(\varphi) = B$$

i warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnej sprowadzają się do

$$A = A + B \cdot 2\pi \qquad \text{i} \qquad B = B,$$

co jest spełnione tylko dla $B = 0$. Rozwiązanie ma zatem postać funkcji stałej

$$\Phi(\varphi) = A.$$

Zauważmy, że jest to szczególny przypadek rozwiązania dla $\nu > 0$

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi} + De^{-im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 1, 2, ...$$

jeśli tylko dopuścimy możliwość $m = 0$.

Zauważmy, że jest to szczególny przypadek rozwiązania dla $\nu > 0$

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi} + De^{-im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 1, 2, ...$$

jeśli tylko dopuścimy możliwość $m = 0$.
Zauważmy również, że każde z liniowo niezależnych rozwiązań możemy zapisać w formie

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

Separacja równania Schrödingera

Zauważmy, że jest to szczególny przypadek rozwiązania dla $\nu > 0$

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi} + De^{-im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 1, 2, \ldots$$

jeśli tylko dopuścimy możliwość $m = 0$.
Zauważmy również, że każde z liniowo niezależnych rozwiązań możemy zapisać w formie

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

a więc m jest dowolną liczbą całkowitą.

Zauważmy, że jest to szczególny przypadek rozwiązania dla $\nu > 0$

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi} + De^{-im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 1, 2, ...$$

jeśli tylko dopuścimy możliwość $m = 0$.
Zauważmy również, że każde z liniowo niezależnych rozwiązań możemy zapisać w formie

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

a więc m jest dowolną liczbą całkowitą.

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi =$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi =$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \, 2\pi =$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \; 2\pi = 1.$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \, 2\pi = 1.$$

W takim razie możemy wybrać $C = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ i unormowane rozwiązania części azymutalnej równania Schrödingera

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \; \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \; 2\pi = 1.$$

W takim razie możemy wybrać $C = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ i unormowane rozwiązania części azymutalnej równania Schrödingera

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \quad \text{gdzie} \quad \nu = m^2,$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \, 2\pi = 1.$$

W takim razie możemy wybrać $C = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ i unormowane rozwiązania części azymutalnej równania Schrödingera

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \quad \text{gdzie} \quad \nu = m^2,$$

mają postać

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{im\varphi},$$

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \, 2\pi = 1.$$

W takim razie możemy wybrać $C = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ i unormowane rozwiązania części azymutalnej równania Schrödingera

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \quad \text{gdzie} \quad \nu = m^2,$$

mają postać

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Separacja równania Schrödingera

Stałą C możemy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_m(\varphi)$ była unormowana w przedziale $[0, 2\pi)$.

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} C^* e^{-im\varphi} C e^{im\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = |C|^2 \; 2\pi = 1.$$

W takim razie możemy wybrać $C = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ i unormowane rozwiązania części azymutalnej równania Schrödingera

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \quad \text{gdzie} \quad \nu = m^2,$$

mają postać

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{im\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$\cos\theta = w,$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$\cos\theta = w, \quad \Theta(\theta) = P(w)$

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta = w, \quad \Theta(\theta) = P(w) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} =$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta = w, \quad \Theta(\theta)=P(w) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta = w, \quad \Theta(\theta)=P(w) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta=w,\quad \Theta(\theta)=P(w)\quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

oraz uwzględnijmy, że $\nu=m^2$, wówczas otrzymamy

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta = w, \quad \Theta(\theta)=P(w) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

oraz uwzględnijmy, że $\nu = m^2$, wówczas otrzymamy

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right)\right]$$

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta=w,\quad \Theta(\theta)=P(w) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

oraz uwzględnijmy, że $\nu=m^2$, wówczas otrzymamy

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right)\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=$$

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta=w,\quad \Theta(\theta)=P(w)\quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

oraz uwzględnijmy, że $\nu=m^2$, wówczas otrzymamy

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right)\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0,$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wróćmy do równania na część biegunową funkcji falowej

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Podstawmy

$$\cos\theta=w,\quad \Theta(\theta)=P(w)\quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

oraz uwzględnijmy, że $\nu=m^2$, wówczas otrzymamy

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right)\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0,$$

Część biegunowa równania Schrödingera

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta \in [0,\pi]$$

Część biegunowa równania Schrödingera

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta \in [-1,1].$$

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta\in[0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta\in[-1,1].$$

Równanie na $P(w)$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu,

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta\in[0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta\in[-1,1].$$

Równanie na $P(w)$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, dlatego posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania.

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta \in [-1,1].$$

Równanie na $P(w)$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, dlatego posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania.
Na ogół oba te rozwiązania są nieskończone przy $w \to \pm 1$,

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta \in [-1,1].$$

Równanie na $P(w)$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, dlatego posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania.
Na ogół oba te rozwiązania są nieskończone przy $w \to \pm 1$, a więc są niefizyczne.

Część biegunowa równania Schrödingera

a po prostych przekształceniach nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P(w)=0.$$

Zauważmy, że

$$\theta \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad w=\cos\theta \in [-1,1].$$

Równanie na $P(w)$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, dlatego posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania.
Na ogół oba te rozwiązania są nieskończone przy $w \to \pm 1$, a więc są niefizyczne.

Część biegunowa równania Schrödingera

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right]P(w) = 0.$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right]P(w) = 0.$$

Rozważmy najpierw równanie dla $m = 0$.

Część biegunowa równania Schrödingera

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right]P(w) = 0.$$

Rozważmy najpierw równanie dla $m = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1 - w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right]P(w) = 0.$$

Rozważmy najpierw równanie dla $m = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1 - w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są wielomiany Legendre'a.

Część biegunowa równania Schrödingera

Rozwiązania skończone przy $w \to \pm 1$ istnieją dla

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{gdzie} \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Nasze równanie przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right]P(w) = 0.$$

Rozważmy najpierw równanie dla $m = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1-w^2\right)\frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są wielomiany Legendre'a.

Część biegunowa równania Schrödingera

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}w^l} \left(w^2 - 1\right)^l, \qquad w \in [-1, 1].$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}w^l} \left(w^2 - 1\right)^l, \qquad w \in [-1, 1].$$

Zadanie. Pokazać, że tak określone wielomiany spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\left(1 - w^2\right) \frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w}\right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}w^l} \left(w^2 - 1\right)^l, \qquad w \in [-1, 1].$$

Zadanie. Pokazać, że tak określone wielomiany spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\left(1 - w^2\right) \frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w} \right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Wskazówka. Przeprowadzić dowód indukcyjny różniczkując $(l+1)$-krotnie tożsamość

$$\left(w^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left(w^2 - 1\right)^l = 2lw \left(w^2 - 1\right)^l$$

Wielomiany Legendre'a można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}w^l} \left(w^2 - 1\right)^l, \qquad w \in [-1, 1].$$

Zadanie. Pokazać, że tak określone wielomiany spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\left(1 - w^2\right) \frac{\mathrm{d}P(w)}{\mathrm{d}w} \right] + l(l+1)P(w) = 0.$$

Wskazówka. Przeprowadzić dowód indukcyjny różniczkując $(l+1)$-krotnie tożsamość

$$\left(w^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left(w^2 - 1\right)^l = 2lw \left(w^2 - 1\right)^l$$

z wykorzystaniem wzoru Leibnitza

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[u(x)v(x)\right] = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m} \frac{\mathrm{d}^{n-m} v(x)}{\mathrm{d}x^{n-m}}.$$

Zadanie. Pokazać, że wielomiany Legendre'a $P_l(w)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, są ortogonalne na przedziale domkniętym $[-1, 1]$,

z wykorzystaniem wzoru Leibnitza

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[u(x)v(x)\right] = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m} \frac{\mathrm{d}^{n-m} v(x)}{\mathrm{d}x^{n-m}}.$$

Zadanie. Pokazać, że wielomiany Legendre'a $P_l(w)$, $l = 0, 1, 2, ...$, są ortogonalne na przedziale domkniętym $[-1, 1]$, tzn. że

$$\int_{-1}^{1} P_l(w) P_{l'}(w)\, \mathrm{d}w = 0, \qquad \mathrm{dla} \quad l \neq l'.$$

z wykorzystaniem wzoru Leibnitza

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[u(x)v(x)\right] = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m} \frac{\mathrm{d}^{n-m} v(x)}{\mathrm{d}x^{n-m}}.$$

Zadanie. Pokazać, że wielomiany Legendre'a $P_l(w)$, $l = 0, 1, 2, ...$, są ortogonalne na przedziale domkniętym $[-1, 1]$, tzn. że

$$\int_{-1}^{1} P_l(w) P_{l'}(w)\, \mathrm{d}w = 0, \qquad \text{dla} \quad l \neq l'.$$

Stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$, definiujemy na odcinku $[-1, 1]$ następującym wzorem

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w).$$

Część biegunowa równania Schrödingera

Stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$, definiujemy na odcinku $[-1, 1]$ następującym wzorem

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w).$$

Zadanie. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1 - w^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - w^2}\right] P_l^m(w) = 0,$$

Stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$, definiujemy na odcinku $[-1, 1]$ następującym wzorem

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w).$$

Zadanie. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1 - w^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - w^2}\right] P_l^m(w) = 0,$$

dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$.

Stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$, definiujemy na odcinku $[-1, 1]$ następującym wzorem

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w).$$

Zadanie. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\left(1 - w^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - w^2}\right] P_l^m(w) = 0,$$

dla $l = 0, 1, 2, \ldots$ i całkowitych m, $|m| \leqslant l$.

Część biegunowa równania Schrödingera

Wskazówka. Oznaczyć

$$v(w) = \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w),$$

wówczas

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} v(w).$$

Obliczyć pierwszą i drugą pochodną i wstawić do równania.

Zadanie. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają następującą relację ortogonalności na odcinku $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(w) P_{l'}^m(w)\,\mathrm{d}w = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'}.$$

Wskazówka. Oznaczyć

$$v(w) = \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w),$$

wówczas

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} v(w).$$

Obliczyć pierwszą i drugą pochodną i wstawić do równania.
Zadanie. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają następującą relację ortogonalności na odcinku $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(w) P_{l'}^m(w) \, \mathrm{d}w = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'}.$$

Stąd wynika, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ można unormować mnożąc je przez czynnik normalizacyjny

$$C_{lm} = \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Wobec tego unormowane rozwiązania części kątowej równania Schrödingera

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

mają postać

Część kątowa równania Schrödingera

Stąd wynika, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ można unormować mnożąc je przez czynnik normalizacyjny

$$C_{lm} = \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wobec tego unormowane rozwiązania części kątowej równania Schrödingera

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, Y=0$$

mają postać

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad =$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \varepsilon \, C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi)$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \quad = \quad \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)$$

$$=$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi}
\end{aligned}
$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\, e^{im\varphi} \\
&=
\end{aligned}
$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\, e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \left\{ \right.
$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon\left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\ e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon\left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \\ & \end{cases}
$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\ &= \varepsilon\left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\ &= \varepsilon\left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \\ \end{cases}$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \quad m > 0 \\ & \end{cases}
$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \quad m > 0 \\ 1, & \end{cases}
$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \quad m > 0 \\ 1, & \text{dla} \end{cases}
$$

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \quad m > 0 \\ 1, & \text{dla} \quad m \leqslant 0 \end{cases}
$$

Część kątowa równania Schrödingera

tzw. funkcji kulistych, albo harmonik sferycznych

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi) \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\; e^{im\varphi} \\
&= \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi},
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadziliśmy dodatkowy czynnik

$$
\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla} \quad m > 0 \\ 1, & \text{dla} \quad m \leqslant 0 \end{cases}
$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\tfrac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\tfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\tfrac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\tfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$
\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r \to r,
$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$
\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta,
$$

Harmoniki sferyczne

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\tfrac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\tfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \pi + \varphi$$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.
Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\tfrac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\tfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \pi + \varphi$$

zachodzi $Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\,,$

Taki wybór czynnika ε jest możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.

Zadanie. Pokazać, że

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \left(\tfrac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, & Y_{20} &= \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\
Y_{10} &= \left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta, & Y_{2\pm1} &= \pm\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{1\pm1} &= \mp\left(\tfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm2} &= \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że przy odbiciu przestrzennym

$$\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \pi + \varphi$$

zachodzi $Y_{lm}(\pi-\theta,\pi+\varphi) = (-1)^l\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$,

tzn., że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.

tzn., że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.

Zauważmy, że wniosek ten dotyczy również funkcji

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

będącej rozwiązaniem równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej,

tzn., że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.

Zauważmy, że wniosek ten dotyczy również funkcji

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

będącej rozwiązaniem równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej, gdyż $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy odbiciu przestrzennym.

tzn., że dla $l = 0, 2, 4, \ldots$ sferyczne harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są funkcjami parzystymi, a dla $l = 1, 3, 5, \ldots$ – funkcjami nieparzystymi.

Zauważmy, że wniosek ten dotyczy również funkcji

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

będącej rozwiązaniem równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej, gdyż $r = |\vec{r}|$ nie ulega zmianie przy odbiciu przestrzennym.

Przypomnijmy, że część kątowa równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \hbar^2 Y(\theta, \varphi),$$

a harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, gdzie $l = 0, 1, 2, ...,$ a $m \leqslant l$, są rozwiązaniem tego równania dla $\lambda = l(l+1)$,

Harmoniki sferyczne

Przypomnijmy, że część kątowa równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \, \hbar^2 Y(\theta, \varphi),$$

a harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, gdzie $l = 0, 1, 2, ...$, a $m \leqslant l$, są rozwiązaniem tego równania dla $\lambda = l(l+1)$, a więc możemy napisać

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) \, \hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Przypomnijmy, że część kątowa równania Schrödingera dla sferycznie symetrycznej energii potencjalnej jest równaniem własnym kwadratu orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \, \hbar^2 Y(\theta, \varphi),$$

a harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, gdzie $l = 0, 1, 2, ...$, a $m \leqslant l$, są rozwiązaniem tego równania dla $\lambda = l(l+1)$, a więc możemy napisać

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) \, \hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Harmoniki sferyczne

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Harmoniki sferyczne

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad =$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

i obliczmy

$$L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) \quad = \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)\right]$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad = \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi)\right]$$

$$=$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi)\right] \\ &= -i\hbar\varepsilon\, C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\right) \end{aligned}$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\varepsilon\ C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi)\right] \\ &= -i\hbar\varepsilon\ C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right) \\ &= \end{aligned}$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\varepsilon\; C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)\right] \\ &= -i\hbar\varepsilon\; C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\right) \\ &= m\hbar\varepsilon\; C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \end{aligned}$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\varepsilon\ C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)\right] \\ &= -i\hbar\varepsilon\ C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\right) \\ &= m\hbar\varepsilon\ C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \\ &= \end{aligned}$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\varepsilon\ C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi)\right] \\ &= -i\hbar\varepsilon\ C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\right) \\ &= m\hbar\varepsilon\ C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\ &= m\hbar\ Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Przypomnijmy również postać trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu we współrzędnych sferycznych

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\varepsilon \; C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \Phi_m(\varphi) \right] \\ &= -i\hbar\varepsilon \; C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right) \\ &= m\hbar\varepsilon \; C_{lm} P_l^m(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\ &= m\hbar \; Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Harmoniki sferyczne

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.

Podsumujmy

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad =$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\, \hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\, \hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi),$$
$$L_z Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Harmoniki sferyczne

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \end{aligned}$$

Harmoniki sferyczne

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\vec{L}^2 \ |lm\rangle$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\vec{L}^2 \,|lm\rangle \quad =$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\vec{L}^2 \, |lm\rangle = l(l+1)\,\hbar^2 \, |lm\rangle \,,$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2 \,|lm\rangle\,, \\ L_z \,|lm\rangle & \end{aligned}$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\begin{aligned} \vec{L}^2\,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2\,|lm\rangle\,, \\ L_z\,|lm\rangle &= \end{aligned}$$

Harmoniki sferyczne

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$
\begin{aligned}
\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\
L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi),
\end{aligned}
$$

albo w notacji Diraca

$$
\begin{aligned}
\vec{L}^2 \,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2 \;|lm\rangle\,, \\
L_z \,|lm\rangle &= m\hbar \;|lm\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2 \,|lm\rangle\,, \\ L_z \,|lm\rangle &= m\hbar\, |lm\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$

Harmoniki sferyczne

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2 \;|lm\rangle\,, \\ L_z \,|lm\rangle &= m\hbar\;|lm\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, ...$ i $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$.

Widzimy, że harmoniki sferyczne są również funkcjami własnymi trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu, czego należało się spodziewać, gdyż obserwable te komutują $[\vec{L}^2, L_z] = 0$.
Podsumujmy

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

albo w notacji Diraca

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \, |lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2 \; |lm\rangle \,, \\ L_z \, |lm\rangle &= m\hbar \; |lm\rangle \,, \end{aligned}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, ...$ i $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$.

Harmoniki sferyczne

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a.
Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$.

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$\langle lm|l'm'\rangle =$$

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$\langle lm|l'm'\rangle = \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi)$$

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$\langle lm|l'm'\rangle = \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi)$$

$$=$$

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm|l'm'\rangle &= \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

Harmoniki sferyczne

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm|l'm'\rangle &= \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

Harmoniki sferyczne

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm|l'm'\rangle &= \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y_{lm}^*(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&\times \quad \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; e^{i(m'-m)\varphi}}
\end{aligned}
$$

Harmoniki sferyczne

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm | l'm' \rangle &= \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&\times \quad \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; e^{i(m'-m)\varphi}}_{0 \ \text{dla} \ m \neq m'}
\end{aligned}
$$

Harmoniki sferyczne

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm | l'm' \rangle &= \int_0^\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&\times \; \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; e^{i(m'-m)\varphi}}_{0 \ \mathrm{dla} \ m \neq m'} = 0.
\end{aligned}
$$

Ortogonalność harmonik sferycznych dla $l \neq l'$ i $m = m'$ wynika bezpośrednio z ortogonalności stowarzyszonych funkcji Legendre'a. Pokażemy, że są one ortogonalne dla $m \neq m'$. Rzeczywiście, obliczmy

$$
\begin{aligned}
\langle lm | l'm' \rangle &= \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\
&= \varepsilon\varepsilon' C_{lm} C_{l'm'} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&\times \; \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; e^{i(m'-m)\varphi}}_{0 \text{ dla } m \neq m'} = 0.
\end{aligned}
$$

Wobec tego wartość własna l jest $(2l + 1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l

Harmoniki sferyczne

Wobec tego wartość własna l jest $(2l+1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l+1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Wobec tego wartość własna l jest $(2l + 1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l + 1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę

Wobec tego wartość własna l jest $(2l+1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l+1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu,

Wobec tego wartość własna l jest $(2l+1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l+1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu,

a liczbę m nazywamy

Wobec tego wartość własna l jest $(2l + 1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l + 1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu,
a liczbę m nazywamy magnetyczną liczbą kwantową.

Harmoniki sferyczne

Wobec tego wartość własna l jest $(2l + 1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l + 1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu,

a liczbę m nazywamy magnetyczną liczbą kwantową.

Ta nazwa stanie się jasna w dalszej części kursu.

Wobec tego wartość własna l jest $(2l+1)$-krotnie zdegenerowana, gdyż dla każdego l istnieje $2l+1$ ortogonalnych funkcji własnych odpowiadających

$$m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

Liczba $l = 0, 1, 2, ...$ nosi nazwę liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu,
a liczbę m nazywamy magnetyczną liczbą kwantową.
Ta nazwa stanie się jasna w dalszej części kursu.

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$L_i^\dagger \quad =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$L_i^\dagger = (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$L_i^\dagger = (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$L_i^\dagger = (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$L_i^\dagger \quad = \quad (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar \delta_{jk} \right)$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k - i\hbar\delta_{jk}) \\ &= \end{aligned}$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$
\begin{aligned}
L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar\delta_{jk} \right) \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j p_k =
\end{aligned}
$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar \delta_{jk} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk}\left(x_j p_k - i\hbar\delta_{jk}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$
\begin{aligned}
L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k - i\hbar\delta_{jk}) \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} (x_j p_k - i\hbar\delta_{jk}) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar\delta_{jk}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger = L_i L_i =$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar\delta_{jk} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger = L_i L_i = \vec{L}^2.$$

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar\delta_{jk} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger = L_i L_i = \vec{L}^2.$$

Widzimy, że zarówno wszystkie składowe operatora orbitalnego momentu pędu,

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim. Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar \delta_{jk} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \mathrm{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2\right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger = L_i L_i = \vec{L}^2.$$

Widzimy, że zarówno wszystkie składowe operatora orbitalnego momentu pędu, jak i jego kwadrat są operatorami hermitowskimi.

Ortogonalność funkcji własnych orbitalnego momentu pędu wiąże się ściśle z faktem, że jest on operatorem hermitowskim.
Obliczmy

$$\begin{aligned} L_i^\dagger &= (\varepsilon_{ijk} x_j p_k)^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k^\dagger x_j^\dagger = \varepsilon_{ijk} p_k x_j = \varepsilon_{ijk} \left(x_j p_k - i\hbar \delta_{jk} \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k = L_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując ten wynik możemy obliczyć

$$\left(\vec{L}^2 \right)^\dagger = (L_i L_i)^\dagger = L_i^\dagger L_i^\dagger = L_i L_i = \vec{L}^2.$$

Widzimy, że zarówno wszystkie składowe operatora orbitalnego momentu pędu, jak i jego kwadrat są operatorami hermitowskimi.

Wcześniej pokazaliśmy, że wektory własne operatora hermitowskiego odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.