MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA

Zestaw 3

1. Pokazać, że siłę Lorentza

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

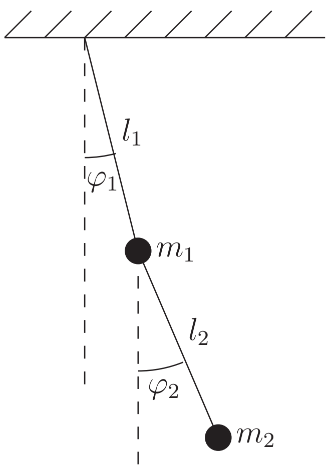
działającą na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\mathbf{E}$ i indukcji $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = -\nabla\varphi\left(\mathbf{r},t\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}\ , \qquad \mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right) = \nabla\times\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right),$$

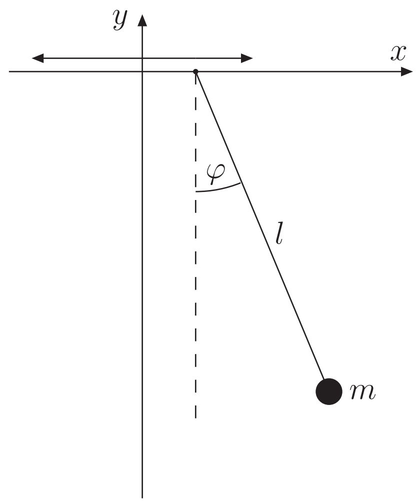
gdzie $\varphi(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, można wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci

$$V\left(\mathbf{r},\mathbf{v},t\right) = q\left(\varphi\left(\mathbf{r},t\right) - \frac{1}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r},\mathbf{t}\right)\cdot\mathbf{v}\right).$$

2. W oparciu o równania Lagrange'a II rodzaju napisać równania ruchu dla podwójnego wahadła matematycznego (patrz rysunek).



Wahadło podwójne



Wahadło z drgającyn punktem zawieszenia

3. Punkt zawieszenia wahadła matematycznego wykonuje na osi x drgania harmoniczne postaci

$$x(t) = A\sin\Omega t, \qquad A,\Omega = \text{const.}$$

(patrz rysunek).

   (a) Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju napisać równanie ruchu.

(b) Rozwiązać równanie ruchu dla małych wychyleń i warunków początkowych:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0.$$

4. Pokazać niezmienniczość równań Lagrange'a II rodzaju przy transformacji cechowania funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, ..., q_{3N-k}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{3N-k}, t)$:

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t),$$

gdzie $F(q,t) = F(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

5. Rozważmy układ N punktów materialnych z k równaniami więzów holonomicznych.

(a) W przypadku więzów skleronomicznych i jeśli nie dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

nie zależą jawnie od czasu. Pokazać, że energia kinetyczna jest wówczas jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, 3N-k$,

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{j,l=1}^{3N-k} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l ,$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości.

(b) W przypadku więzów reonomicznych lub jeśli dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}, t), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

zależą jawnie od czasu. Pokazać, że wówczas energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = a + \sum_{j=1}^{3N-k} a_j \dot{q}_j + \sum_{j,l=1}^{3N-k} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l ,$$

gdzie współczynniki a, a_j i a_{jl} nie zależą od prędkości.

6. (a) Niech $F(x, y, z)$ będzie funkcją jednorodną n-tego rzędu, tzn.

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z) .$$

Pokazać, że

$$x \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z) + y \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) + z \frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) = n F(x, y, z) .$$

(b) Pokazać, że przy spełnieniu warunków określonych w zadaniu 4(a)

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T .$$